Lezione 5 - Invarianti e Teoria dei Giochi

Problema 1 *Si consideri la somma* $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 10$. *É possibile scegliere opportunamente i segni di tale somma in modo da ottenere* 0*?*

Soluzione: No. Risulta $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$ dispari, cambiando il segno di ogni addendo la parità della somma non cambia, quindi non è possibile ottenere 0.

Problema 2 *Gli interi* $1, 2, \ldots, n$ *sono disposti in ordine casuale. Ad ogni passo si possono scambiare due interi vicini. Provare che non si può tornare alla configurazione iniziale dopo un numero dispari di scambi.*

Soluzione: Sia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ la configurazione iniziale degli interi. Per ogni coppia di indici $i < j$ poniamo $b_{i,j}$ uguale a 0 se $a_i < a_j$ e a 1 se $a_i > a_j$. Se scambiamo a_k con a_{k+1}, i valori di $b_{i,k}$ e $b_{i,k+1}$ (con $i < k$) e i valori di $b_{k,j}$ e $b_{k+1,j}$ (con $j > k$) verranno rispettivamente scambiati, mentre il valore di $b_{k,k+1}$ verrà cambiato. Dunque, la somma $\sum_{i<j} b_{i,j}$ ad ogni scambio cambia parità (viene aumentata o diminuita di 1), quindi è impossibile ritornare alla configurazione iniziale con un numero dispari di scambi.

Problema 3 *Adriele e David si sfidano al seguente gioco: sul tavolo vengono disposti* 2 *file di sassolini, la prima da* 20 *e la seconda da* 2018 *sassolini. A turno i due possono scegliere una delle due file e togliere un numero di sassi a piacere da quella fila, tuttavia stavolta perde chi prende l'ultimo sasso rimasto. Inizia a giocare Adriele; chi dei due ha una strategia vincente?*

Soluzione: Adriele, che gioca per primo, ha una strategia vincente: basta lasciare a David sempre la configurazione (n, n), cioè dove le due file hanno sempre lo stesso numero di sassi, con $n \geq 2$. Se vi è una fila con un solo sasso, Adriele toglie tutti quelli dell'altra pila, se invece vi è una pila vuota Adriele toglie tutti i sassi tranne uno.

Problema 4 *Intorno ad un cerchio si trovano cinque cifre* 1 *e quattro* 0*. Per ogni coppia di numeri consecutivi, si scrive tra di essi uno zero se questi sono uguali, altrimenti si scrive un uno. Poi le cifre originali vengono cancellate. Dimostrare che, se si ripete il procedimento più volte, non si otterranno mai nove cifre* 0*.*

Soluzione: È possibile arrivare alla configurazione con sole cifre 0 solo da una configurazione con tutte le cifre uguali, quindi ancora tutti 0 o tutti 1. Ma la configurazione con tutte le cifre 1 deriverebbe da un'altra con le cifre 0 e 1 alternate, il che è impossibile con un numero di cifre dispari.

Problema 5 *Dato un intero positivo k, Alberto e Giovanni giocano su una griglia bianca quadrata e infinita, ad ogni turno Alberto colora una casella bianca di rosso, Giovanni colora una cella bianca di blu. Alberto vince se riesce a colorare una regione contigua (due celle x e y sono contigue se condividono un lato) tale che il più piccolo rettangolo che la contiene interamente è un quadrato di lato k.*

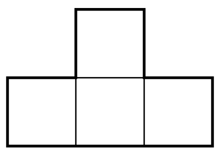
Soluzione:

$k = 1$: Alberto vince in modo banale.

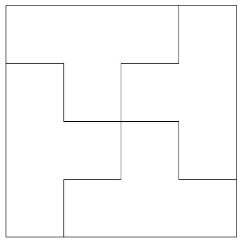
$k = 2$: Alberto vince giocando in (x, y), senza perdità di generalità supponiamo che Giovanni risponda colorando la casella in (a, b), con $a \geq x$ e $b \geq y$. Allora Alberto gioca in $(x - 1, y - 1)$.

$k \geq 3$: Giovanni può vincere:
suddividiamo le celle in coppie del tipo $\{(2x, y), (2x + 1, y)\}$. Ogni qualvolta Alberto gioca in X, Giovanni risponde colorando la cella Y appartenente al gruppo $\{X, Y\}$.
In questo modo, Alberto non riuscirà mai a formare regioni contigue di spazio che abbiano una lunghezza orizzontale maggiore o uguale a tre.

Problema 6 *(Dal Concorso di ammissione alla SSC 2015)*
Quali quadrati di lato intero si possono costruire con delle tessere della forma seguente, tenendo presente che ogni quadratino ha lato 1*?*



Soluzione: Si può costruire nel seguente modo il quadrato di lato 4 e con esso facilmente anche tutti i quadrati con lato divisibile per 4.



Dato che le tessere hanno area 4, il lato di ogni quadrato costruibile non può essere dispari, quindi resta da stabilire se i quadrati di lato pari e non divisibile per 4 siano costruibili o no. Si noti che un tale quadrato deve essere costruito con un numero dispari di tessere.
Supponiamo di essere riusciti a costruirlo e immaginiamo che sia colorato a scacchiera, si vede allora che ogni tessera copre o 3 caselle bianche e una nera o 3 nere e una bianca, chiamiamo tessere *di tipo* A le prime e *di tipo* B le seconde. Supponiamo ci siano n tessere di tipo A e m tessere di tipo B, con $n + m$ dispari, per quanto detto sopra. Allora si avranno $3n + m$ caselle bianche e $3m+n$ caselle nere e questi due numeri devono essere uguali, segue facilmente che $n = m$, ma allora $n+m$ non può essere dispari, da cui l'assurdo e l'impossibilità di costruire tali quadrati di lato non divisibile per 4.

Problema 7 *Barbara e Andrea giocano su una griglia quadrata di punti infinita in tutte e quattro le direzioni (che potrebbe essere vista come l'insieme di punti a coordinate intere nello spazio cartesiano). Ad ogni turno si prende un segmento di lunghezza unitario che connette due punti adiacenti della griglia (nel seguito questi segmenti verranno chiamati "archi") e gli si assegna una direzione (se l'arco è orizzontale, si sceglie tra destra e sinistra, se invece è verticale si sceglie tra alto e basso).*

Inizia Barbara. Andrea vince se riesce a formare un ciclo (percorso che partendo da un punto e seguendo gli archi secondo la loro direzione, dopo aver attraversato un numero finito di archi ritorna allaposizione di partenza). Andrea può vincere?

Soluzione: No. Andrea non potrà mai vincere. Si dividano gli archi in gruppi da due adiacenti in modo di formare degli angoli in alto a destra nei punti sopra l'asse x ed angoli in basso a destra nei punti sotto l'asse x. La prima mossa di Barbara sarà quella di orientare un arco da $(0,0)$ a $(1,0)$, poi il gioco procede come segue:

1) se Andrea orienta un arco lungo l'asse x, Barbara orienterà un arco a caso lungo l'asse x.

2) se Andrea orienta un arco che non giace sull'asse x, Barbara risponderà orientando l'arco ad esso associato, in modo che entrambi gli archi puntino verso il vertice nell'angolo oppure che entrambi gli archi puntino nel verso opposto rispetto al vertice nell'angolo. Così facendo, dato che un ciclo deve per forza avere un angolo in alto a destra se una sua parte si trova sopra l'asse x e deve avere un angolo in basso a destra se una sua parte si trova sotto l'asse x, Andrea non ha possibilità di vincere.

Problema 8 *Dati due interi n e k, con $n \geq k \geq 2$. Fai un gioco con uno stregone malvagio.*
Lo stregone ha $2n$ carte: per ogni $i = 1, ..., n$ ci sono due carte con il numero i. Inizialmente, il mago posiziona tutte le carte a faccia in giù in una riga, in un ordine sconosciuto.
Puoi fare più volte mosse di questo tipo: indichi k carte qualunque e lo stregone le gira; se due di queste carte hanno lo stesso numero, il gioco finisce e vinci; altrimenti, lo stregone mescola le k carte e le rimette a faccia in giù, dopodicché è di nuovo il tuo turno.
Diciamo che si può vincere questo gioco se esiste un intero positivo m e una strategia che ci garantisce di vincere in al massimo m mosse.
Per quali valori di n e k si può vincere il gioco?

Soluzione: Si può vincere il gioco se e solo se $n \neq k$.

se $2 \leq k < n$: Si chiedono prima le carte nella posizione $\{1, ..., k\}$, poi $\{2, ..., k+1\}$, e così via fino a $\{2n-k+1, ..., 2n\}$. Ossevando le differenze in ogni coppia di set di carte consecutivi, possiamo dedurre sicuramenti i valori delle carte $1, 2, ..., 2n-k+1$.

se $k \leq n$: Le carte di cui conosciamo i valori sono più di n, quindi possiamo trovare una coppia.

Se $k = n$, ci troviamo nella seguente situazione: ad ogni turno dopo il primo, supposto che non si ha vinto, ci sono n carte rappresentanti ognuno dei n valori esattamente una volta ciascuno, di maniera tale che il giocatore non ha informazioni sull'ordine di alcuna di queste n carte. Di conseguenza possiamo affermare che il giocatore non ha la vittoria garantita: sia S l'insieme di queste n carte e sia S^c l'insieme delle altre n carte. Il giocatore non può vincere mai scegliendo solo carte in S o in S^c. Inoltre, se il giocatore sceglie alcune carte di S e alcune carte di S^c, allora è possibile che la scelta delle carte in S sia il complementare esatto di quelle scelte da S^c; la strategia non può prevenire tutto ciò perché il giocatore non ha informazioni su S. Da ciò il risultato.

Problema 9 *I partecipanti di un torneo si sfidano tutti tra di loro esattamente una volta. Non esiste il pareggio. Alla fine del torneo, ogni giocatore scrive su un foglio i nomi dei partecipanti che ha battuto o che sono stati battuti da un giocatore che ha battuto. Dimostrare che esiste un giocatore che ha scritto i nomi di tutti i partecipanti.*

Soluzione: Tra tutti i giocatori ne esiste sicuramente uno, A, col massimo numero di vittorie. Supponiamo per assurdo che non ci siano tutti i nomi nel suo foglio, dunque esiste qualcuno con cui ha perso, B. Ma allora questo altro giocatore B avrà sul suo foglio sia il nome di A che quelli scritti nel foglio di quest'ultimo, dunque avrà più vittorie di A il che è assurdo.

Problema 10 *Alice e Bob giocano su una griglia* 6×6. *Ad ogni turno, un giocatore sceglie un numero razionale non presente nella griglia e lo scrive in una cella vuota. Quando tutte le celle contengono un numero, per ogni riga viene colorata di nero la cella con il numero più grande. Alice vince solo se può disegnare una linea dall'alto al basso che passa solo per celle nere, Bob vince se non è possibile. (Se due celle condividono un vertice, Alice può disegnare una linea da una cella all'altra senza passare per altre celle).*
Trova, con dimostrazione, una strategia vincente per uno dei due giocatori.

Soluzione: Denotiamo le colonne come $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$.
Mostriamo che Bob può fare una delle suguenti mosse in una qualunque riga:

1) imporre che la cella colorata di nero sia in una delle colonne c_1, c_2, c_3;
2) imporre che la cella colorata di nero sia in una delle colonne c_4, c_5, c_6;
3) imporre che la cella colorata di nero sia in una delle colonne c_1, c_2, c_5, c_6.

Ora Bob esegue la mossa 1 sulla prima riga, la mossa 3 sulla seconda riga, e la mossa 2 sulla terza riga.

caso 1: se, nella seconda riga, la cella colorata di nero è in una delle colonne c_1, c_2, allora non può essere connessa con la terza riga;

caso 2: se, nella terza riga, la cella colorata di nero è in una delle colonne c_5, c_6, allora non può essere connessa con la prima riga.

In ogni caso, Bob vince.

Caso 1:

X	X	X			
X	X				
			X	X	X

Caso 2:

X	X	X			
				X	X
			X	X	X

Le caselle barrate indicano le possibili posizioni della cella colorata di nero. Di conseguenza, Bob vince sempre in una griglia 6×3.

Problema 11 101 *SSC-ini sono radunati in cerchio. Ognuno di essi pensa che la Terra ruota attorno a Giove oppure che Giove ruota attorno alla Terra. Ogni minuto, tutti gli SSC-ini esprimono la loro opinione contemporaneamente. Subito dopo, ogni SSC-ino che si trova tra due persone con una diversa opinione da lui, cambia opinione; gli altri non cambiano opinione. Dimostra che a un certo punto gli SSC-ini smetteranno di cambiare opinione.*

Soluzione: Consideriamo le due possibili opinioni come bit $0, 1$.
Si può osservare che la più grande stringa di valori alternati del tipo $\ldots 01010 \ldots$ confina con dei bit che fanno parte di stringhe di bit tutti uguali, come

$\dots 00 \dots$ o $\dots 11 \dots$. Ogni SSC-ino all'estremità di ogni stringa alternata non cambia opinione. Chiaramanete, la lunghezza della più grande stringa alternata decresce strettamente ad ogni passo. Si noti inoltre che la lunghezza di una stringa formata da bit tutti uguali può rimanere invariata o aumentare. Ne segue che il processo termina in un numero finito di passi (al massimo 50).

Problema 12 *Su una circonferenza vi sono $2n+1$ punti che lo dividono in archi uguali ($n \geq 2$). Due giocatori a turno cancellano un punto alla volta. Se dopo un turno tutti i triangoli formati dai punti rimanenti sulla circonferenza sono ottusi, il giocatore successivo vince e il gioco termina. Chi ha una strategia vincente: il giocatore che inizia o il suo avversario?*

Soluzione: Sia O il centro della circonferenza.

1) Tre punti della circonferenza formano un triangolo acutangolo se e solo se il triangolo contiene O. Ciò segue dal fatto che se ABC contiene O allora $2\angle ABC = \angle AOC$, e dal fatto che la somma degli angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circoferenza è pari a π.

2) Il gioco termina quando una stringa di n o più punti consecutivi sulla circoferenza viene rimossa.
Si uniscano tutti i rimanenti punti formando così un m-agono; tutti i punti si trovano in una delle due metà del piano. Ciò significa che una stringa di n o più punti consecutivi è stata rimossa.

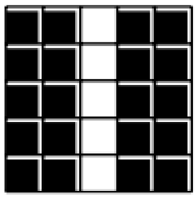
3) Il secondo giocatore vince sempre.

passo base: quando $n = 2$ ci sono 5 punti, e il secondo giocatore vince al suo primo turno togliendo un punto vicino al punto che il primo giocatore ha già scelto.

passo induttivo: se $n = k > 2$, allora numeriamo i punti in senso orario come $1, 2, \dots, 2k+1$. Senza perdità di generalità, il primo giocatore rimuove il punto 1, quindi il secondo giocatore rimuove il punto $k+1$. Notiamo ora che ogni stringa di $k-1$ punti consecutivi deve passare sopra o terminare con il punto 1 o il punto $k+1$, così possiamo applicare la strategia per $2(k-1)+1$ punti e assicurarci la vittoria. Così, per induzione, il secondo giocatore vince sempre.

Problema 13 *Su una scacchiera 5×5 Giuntino scrive -1 su una casella e $+1$ sulle restanti 24 caselle. Inventa poi un gioco in cui può iterare la seguente mossa: scegliere un sottoquadrato $a \times a$ con $a > 1$ e invertire i segni al suo interno. L'obiettivo è raggiungere la configurazione in cui su tutte le caselle si trova scritto $+1$. Su quale casella dovrebbe porre il -1 iniziale per raggiungere l'obiettivo?*

Soluzione:



Coloriamo la scacchiera come in figura. Ci si rende conto come ogni sottoquadrato ammesso contiene un numero pari di caselle nere, dunque la parità del numero di -1 presenti sulle caselle nere è un invariante del problema. Poiché alla fine si vuole ottenere una configurazione senza -1, allora il -1 iniziale dovrà trovarsi nelle caselle bianche. Per simmetria, lo stesso discorso vale considerando la direzione orizzontale, dunque l'unica casella possibile è quella centrale. Mostriamo operativamente la strategia per ottenere tutti $+1$ in questo caso:

1. Cambiare i segni del quadrato 3×3 in alto a sinistra
2. Cambiare i segni del quadrato 3×3 in basso a destra
3. Cambiare i segni del quadrato 2×2 in alto a destra
4. Cambiare i segni del quadrato 2×2 in basso a sinistra
5. Cambiare i segni di tutta la scacchiera 5×5

Problema 14 *Ci troviamo nel primo quadrante del piano cartesiano, prendiamo in considerazione i punti del tipo (a, b) dove sia a che b sono interi non negativi. Nel piano ci sono tre pedine, in posizione $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$. Ad ogni turno, se hai una pedina in posizione (x, y) e non hai pedine nelle posizioni $(x + 1, y)$ e $(x, y + 1)$ puoi effettuare la seguente mossa: rimuovi la pedina in (x, y) e aggiungi due pedine rispettivamente in $(x + 1, y)$ e $(x, y + 1)$. Riuscirai a liberare le caselle $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ in un numero finito di mosse?*

Soluzione: No. Si prenda in considerazione il seguente invariante: attribuiamo ad ogni punto (x, y) il valore $1/(2^{x+y})$, notando che il valore corrispondente a (x, y) è uguale alla somma dei valori corrispondenti a $(x+1, y)$ e $(x, y+1)$. Quindi il valore totale del nostro insieme di pedine rimane invariato.
Il valore delle 3 pedine iniziali è 2 in totale. Se tutto il piano prolungato indefinitamente in entrambe le direzioni fosse tutto coperto da pedine avremmo i seguenti valori:

$$\begin{aligned}
\text{prima riga:}\quad & 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 2 \\
\text{seconda riga:}\quad & \text{metà della prima riga} = 1 \\
\text{terza riga:}\quad & \text{metà della seconda riga} = 1/2 \\
& \dots \\
\text{primo quadrante:}\quad & 2(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ...) = 4
\end{aligned}$$

Quindi il valore di tutto il primo quadrante meno il valore dei tre punti iniziali è pari a 2, quindi non possiamo liberare le tre caselle in un numero finito di mosse.

Problema 15 *Sui vertici di un pentagono regolare sono scritti cinque numeri interi tali che la loro somma sia positiva. È possibile effettuare la seguente trasformazione: se su tre vertici consecutivi si trovano rispettivamente i numeri x, y, z e $y < 0$, allora possiamo cambiare la terna (x, y, z) in $(x + y, -y, z + y)$. Questo processo può continuare fintanto che almeno uno dei numeri è negativo. Il gioco può continuare all'infinito?*

Soluzione: Indichiamo i vertici con a, b, c, d, e . Consideriamo la funzione $f(a, b, c, d, e) = (a-c)^2+(c-e)^2+(e-b)^2+(b-d)^2+(d-a)^2$. Chiaramente $f \geq 0$. Supponiamo senza perdere di generalità che sia $c < 0$ e applichiamo la mossa. Allora

$$\begin{gathered}
f(a, b+c, -c, d+c, e) = (a+c)^2 + (-c-e)^2 + (e-b-c)^2 + \\
+(b-d)^2 + (d+c-a)^2 = [(a-c)^2 + 4ac] + [(c-e)^2 + 4ce] + \\
+[(e-b)^2 - 2ec + 2bc + c^2] + (b-d)^2 + [(d-a)^2 - ac + 2cd + c^2] = \\
= f(a, b, c, d, e) + 2c(a+b+c+d+e)
\end{gathered}$$

Dal momento che $c < 0$ e $a + b + c + d + e > 0$, la funzione f decresce strettamente ad ogni step. Poichè inoltre f è sempre un numero intero positivo, allora avrà necessariamente un valore minimo che raggiunge in un numero finito di mosse.

Problema 16 *Alessio e Borzì giocano su una scacchiera* 4×4 *nel seguente modo: a turno colorano una casella della scacchiera; perde chi colora per primo un quadrato* 2×2. *Inizia Alessio, chi ha una strategia vincente?*

Soluzione: Si consideri la simmetria ottenuta tracciando uno degli assi di simmetria del quadrato, che lo divide in due sotto-scacchiere 2×4. Borzì vince nel seguente modo: per ogni mossa che fa egli gioca la stessa mossa nell'altra griglia 2×4, ovvero: considerata la seguente suddivisione della scacchiera, quando Alessio colora una casella con la lettera x, Borzì colora la casella dell'altra sotto-scacchiera con la lettera x.

a	b	c	d
e	f	g	h
a	b	c	d
e	f	g	h

Problema 17 *(IMO shortlist 2012) Anna e Bob fanno un gioco con* 2012 *scatole in cerchio ed* $n \geq 2012$ *monete. Inizialmente Anna dispone le monete nelle scatole in modo che ognuna ne contenga almeno una, dunque ogni turno Bob prende esattamente una moneta per scatola e la sposta su una scatola adiacente. Anna puó allora spostare ogni moneta non usata da Bob in una scatola adiacente.*
Anna vince se per ogni turno di Bob può rispondere lasciando almeno una moneta in ogni scatola. Qual'è il più piccolo intero per cui Anna vince?

Soluzione: La risposta è 4022. Mostriamo che per $n = 4022$ Anna ha una strategia vincente. Per fare ciò proveremo che Anna riesce a mantenere la condizione più forte:

1. ogni scatola ha al più due monete

2. le due scatole con una moneta non sono mai adiacenti

Problema 18 *(Cesenatico 2008)*
Laura e Gabriele fanno il seguente gioco. Sul tavolo ci sono inizialmente alcune colonne di monete. Ogni colonna può contenere un certo numero di monete, che può eventualmente variare da colonna a colonna. A turno, ogni giocatore fa una e una sola delle seguenti possibili mosse:

- *sceglie una colonna contenente un numero pari non nullo $2k$ di monete e la sostituisce con due colonne contenenti k monete ciascuna;*
- *leva dal tavolo tutte le colonne contenenti un numero dispari di monete.*

Nel caso in cui non fosse possibile effettuare una mossa del primo tipo, il giocatore ne farà necessariamente una del secondo tipo, e viceversa.

(a) *Se inizialmente sul tavolo c'è una sola colonna, la quale contiene 2018^{2018} monete, quale giocatore ha una strategia vincente?*

(b) *Per quali configurazioni iniziali Laura ha una strategia vincente?*

<u>Soluzione</u>: Verifichiamo innanzitutto che il gioco ha termine dopo un numero finito di mosse. Supponiamo dapprima che inizialmente ci sia una sola colonna di monete, con $2^{\alpha}d$ monete dove d è un numero dispari, e ragioniamo per induzione su α.

passo base: se $\alpha = 0$ il gioco si conclude dopo una sola mossa, cioè la mossa che elimina l'unica colonna dispari di d monete;

passo induttivo: supponiamo che per $\alpha = k$ il gioco termina in al più N mosse; $\alpha = k+1$, con la prima mossa questa colonna sarà suddivisa in due colonne con $2^k d$ monete ciascuna, e per eliminare ciascuna delle due colonne serviranno al più N mosse; il gioco terminerà quindi dopo $2N+1$ mosse.

Infine, se inizialmente sul tavolo ci sono m colonne di monete $C_1, \ldots, C_m$ e per eliminare le monete di ciascuna di esse sono necessarie al più $N_1, \ldots, N_m$ mosse, il gioco terminerà dopo al più $N_1, \ldots, N_m$ mosse.
Osserviamo poi che l'ultima mossa del gioco deve eliminare tutte le monete rimaste; pertanto prima dell'ultima mossa ci saranno sul tavolo solo colonne con un numero dispari di monete, e vincerà il giocatore che si troverà a muovere quando questo avverrà.

Supponiamo ora che sul tavolo ci siano m colonne di monete, contenenti rispettivamente $n_1, \ldots, n_m$ monete. Sia A il numero degli n_i che sono divisibili per 4, B, il numero degli n_i che sono divisibili per 2 ma non per 4, e sia $\delta = 1$ se ci sono colonne con un numero dispari di monete, $\delta = 0$ altrimenti. Definiamo come valore della configurazione il numero $\delta + A + \delta AB$.
Il valore della configurazione prima dell'ultima mossa è 1 ($\delta = 1$, $A = 0$, $B = 0$); dimostriamo che Laura ha una strategia vincente se e solo se il valore della configurazione iniziale è un numero dispari.
Questo perché:

(a) se prima di muovere un giocatore si trova di fronte ad una configurazione di valore dispari, allora potrà sempre lasciare l'avversaria di fronte ad una combinazione di valore pari;
Dimostrazione:

- se $\delta = 0$, allora A è dispari. Il giocatore suddivide una colonna con un numero di monete $4k$ in due colonne con $2k$ monete ciascuna. Allora δ rimane invariato, mentre A diventa pari (se k è pari B aumenta di 1, altrimenti diminuisce di 1);
- se $\delta = 1$ e A è pari, il giocatore rimuove le colonne con un numero dispari di monete (varia solo la parità di δ);
- se $\delta = 1$ e A è dispari, allora necessariamente B è dispari. In questo caso il giocatore suddivide una colonna con $2d$ monete (con d dispari) in due colonne con d monete (varia solo la parità di B).

(b) se prima di muovere un giocatore si trova di fronte a una configurazione di valore pari, allora lascierà necessariamente all'avversaria una configurazione di valore dispari. Dimostrazione:

- se $\delta = 0$, allora A è pari. Suddividendo in due una colonna con $4k$ monete cambia solo la parità di A, mentre suddividendo in due una colonna con $2d$ monete (con d dispari) cambia solo la parità di δ;
- se $\delta = 1$, allora A è dispari e B è pari. Se il giocatore rimuove le colonne con un numero dispari di monete, cambia solo la parità di δ; se suddivide in due una colonna con $4k$ monete cambia solo la parità di A; se suddivide in due una colonna con $2d$ monete (con d dispari) cambia solo la parità di B.

Dimostrato questo, è chiaro che, se la configurazione iniziale ha una valore dispari, la strategia vincente di Laura sarà quella di lasciare all'avversario sempre una configurazione di valore pari, mentre se la configurazione iniziale ha valore pari, allora Laura lascerà a Gabriele dopo la prima possa una configurazione con valore dispari, e sarà Gabriele ad avere una strategia vincente. Il caso in cui c'è una sola colonna con 2008^{2008} monete produce un valore di gioco dispari ($\delta = 0$, $A = 1$, $B = 0$), quindi il ragionamento precedente dimostra che Laura ha una strategia vincente in questo caso.

Problema 19 *(IMO shortlist 2009)*
Considera 2009 *carte, ognuna avente un lato verde e un lato rosso, disposte una accanto all'altra su un lungo tavolo. Inizialmente tutte le carte sono girate dal lato verde. Due giocatori, entrambi dalla stessa parte del tavolo, fanno un gioco, alternando una mossa a testa. Ogni mossa consiste nello scegliere un gruppo di* 50 *carte consecutive, purché quella più a sinistra mostri il lato verde, e nel capovolgerle tutte, così che tutte quelle che mostravano il lato verde ora mostrano il lato rosso e viceversa. Il giocatore che per ultimo può fare una mossa legale vince.*

(a) Il gioco termina per forza?

(b) Esiste una strategia vincente per il giocatore che inizia per primo?

<u>Soluzione</u>:

(a) Interpretiamo una carta che mostra il lato rosso come 0 e una carta che mostra il lato verde come 1. Così ogni possibile combinazione delle 2009 carte, lette da sinistra a destra, corrisponde biettivamente a un intero non negativo scritto in notazione binaria con 2009 cifre, dove gli zeri inziali sono ammessi. Ogni mossa, poiché trasforma la prima carta del blocco scelto da verde a rossa, fa diminuire il numero corrispondente allo stato attuale, di conseguenza il gioco ha sicuramente fine.

(b) Mostriamo che non c'è strategia vincente per il giocatore che inizia. Etichettiamo le carte da destra a sinistra con $1, \ldots, 2009$ e consideriamo l'insieme S di carte con le etichette del tipo $50i$, con $i = 1, 2, \ldots, 40$. Sia g_n il numero di carte appartenenti a S che mostrano il lato verde dopo n mosse. Ovviamente, $g_0 = 40$. Inoltre, vale $|g_n - g_{n+1}| = 1$ per tutta la durata del gioco. Di conseguenza, dopo un numero dispari di mosse, il giocatore che inizia per ultimo trova sempre una carta appartenente all'insieme S che mostra la faccia verde e quindi può fare una mossa. Di conseguenza, il secondo giocatore vince sempre.