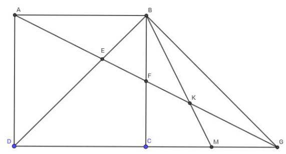
Lezione 4 - Geometria

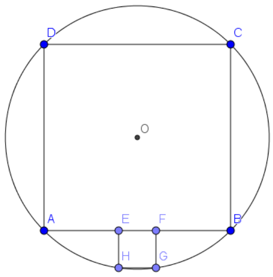
Problema 1 *Sia $ABCD$ un quadrato. Si prolunghi il lato DC dalla parte di C fino al punto G tale che $\overline{CG} \cong \overline{DC}$ e sia M il punto medio di $\overline{CG}$. Siano E, F e K i punti di intersezione di $\overline{AG}$ con $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{BM}$ rispettivamente. Trovare il rapporto $\overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FK}$.*

Soluzione: Si dimostra $\triangle AFB \cong \triangle GFC$ da cui segue che F è punto medio di $\overline{BC}$. Inoltre $\triangle AED \sim \triangle FEB$ avendo tutti e tre gli angoli congruenti da cui segue $\overline{AE} \cong 2\ \overline{EF}$. Per trovare la lunghezza di $\overline{FK}$ consideriamo $\triangle BCG$. $\overline{GF}$ e $\overline{BM}$ sono due mediane e K è la loro intersezione per cui si ha $FK \cong \frac{1}{3}\overline{FG} \cong \frac{1}{3}\overline{AF}$ da cui ricaviamo il rapporto cercato che è $2 : 1 : 1$.



Problema 2 *Sia $ABCD$ quadrato inscritto in una circonferenza. Viene disegnato un altro quadrato nel segmento circolare AB tale che uno dei lati giaccia su $\overline{AB}$ e gli altri due vertici stiano sulla circonferenza. Trovare il rapporto tra le aree dei due quadrati.*

Soluzione: Sia r il raggio della circonferenza, allora $AB = r\sqrt{2}$. Sia M il punto medio di $\overline{EF}$ e X l'intersezione tra $\overline{OM}$ e $\overline{AB}$, allora si ha $\overline{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}r + l$, $\overline{OF} = r$ e $\overline{MF} = \frac{l}{2}$ (con l lato di EFGH). Applicando il teorema di Pitagora a $\triangle OMF$ si ha: $(\frac{\sqrt{2}r}{2} + l)^2 + \frac{l^2}{4} = r^2 \implies 5l^2 + 4lr\sqrt{2} - 2r^2 = 0$ da cui $(5l - r\sqrt{2})(l + r\sqrt{2}) = 0$. Dunque scartando la soluzione negativa si ha $\overline{EF} = l = \frac{r\sqrt{2}}{5}$. Pertanto il rapporto tra le aree è $\frac{1}{25}$.



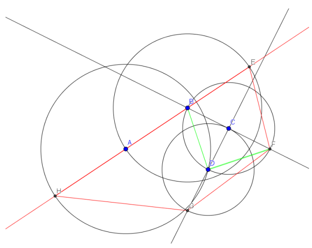
Problema 3 *Sia $ABCD$ quadrilatero convesso di area 1.*
Prolunghiamo $\overline{AB}$ fino ad E in modo che $\overline{AB} = \overline{BE}$.
Prolunghiamo $\overline{BC}$ fino ad F in modo che $\overline{BC} = \overline{CF}$.
Prolunghiamo $\overline{CD}$ fino ad G in modo che $\overline{CD} = \overline{DG}$.
Prolunghiamo $\overline{DA}$ fino ad H in modo che $\overline{DA} = \overline{AH}$.
Trovare l'area del quadrilatero $EFGH$.

Soluzione: $\triangle BCD$ e $\triangle CDF$ hanno stessa area, avendo stessa base e stessa altezza Per ragionamenti analoghi otteniamo le seguenti relazioni tra le aree:

$$A_{CFG} = 2A_{BCD} \qquad A_{BEF} = 2A_{ABC} \qquad A_{AHE} = 2A_{ABD} \qquad A_{DGH} = 2A_{ACD}$$

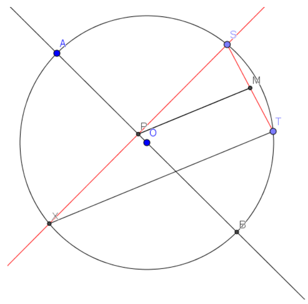
quindi

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} + A_{CFG} + A_{BEF} + A_{AHE} + A_{DGH} = A_{ABCD} + 4A_{ABCD} = 5.$$



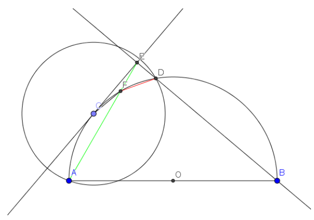
Problema 4 *Sia $\overline{ST}$ una corda di lunghezza costante che "scorre" lungo una semicirconferenza. Sia $\overline{AB}$ il diametro della semicirconferenza. Sia M il punto medio di $\overline{ST}$ e inoltre sia P il piede della perpendicolare ad $\overline{AB}$ passante per S. Dimostra che $M\widehat{P}S$ è indipendente dalla posizione di $\overline{ST}$.*

Soluzione: Si costruisca la circonferenza completando la semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$. Si allunghi il segmento $\overline{SP}$ fino ad incontrare il punto $X \neq S$ dall'altra parte della circonferenza. Dato che $\overline{SX} = 2\overline{SP}$, $\overline{ST} = 2\overline{SM}$ allora $\triangle SMP$ e $\triangle STX$ sono simili. Quindi $M\widehat{P}S \cong T\widehat{X}S$, ma $T\widehat{X}S$ è costante! (Infatti $\overline{ST}$ è costante ed X si trova sempre dalla stessa parte della circonferenza rispetto alla corda).



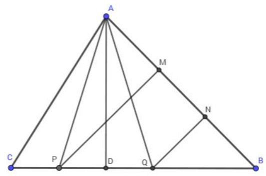
Problema 5 *Sia $\overline{AB}$ il diametro di una semicirconferenza e C, D due punti su di essa tali che $\overline{AC}$=$\overline{CD}$. La tangente in C interseca $\overline{BD}$ in E.*
$\overline{AE}$ interseca la semicirconferenza in F. Dimostra che $\overline{CF}$<$\overline{FD}$.

Soluzione: Ovviamente $\overline{AD}\perp\overline{BD}$, $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$ e $\overline{AD} = 2\overline{CE}$, sia M il punto medio di $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ è una mediana di $\triangle AMC$ rettangolo in M, e da
$\overline{AC} > \overline{AM}$ la bisettrice di $C\widehat{A}M$ interseca la semicirconferenza in un punto dell'arco FD, che è punto medio dell'arco CD. Da qui segue la tesi.



Problema 6 *Sia $\triangle ABC$ con angolo acuto in B. Siano P e Q appartenenti a $\overline{BC}$, ed M, N le loro proiezioni sul segmento $\overline{AB}$. Sapendo che $\overline{AP} = \overline{AQ}$ e che $\overline{AM}^2 - \overline{AN}^2 = \overline{BN}^2 - \overline{BM}^2$ trova l'angolo in B.*

Soluzione: Dalle ipotesi si ha $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2 = \overline{AN}^2+\overline{BN}^2$ che, sostituendo $BM \cong BN + MN$ e $AN \cong AM + MN$, si semplifica in
$2BN \times MN \cong 2AM \times MN \implies \overline{AM} = \overline{BN}$. Sia D il punto medio di $\overline{PQ}$, dato che $\triangle PQA$ è isoscele in $\widehat{A}$ allora $\overline{AD}$ è perpendicolare a $\overline{BC}$. Quindi $\triangle BDA$ è rettangolo in D. Proiettiamo D in $\overline{AB}$ ottenendo E, che per il Teorema di Talete sarà il punto medio del segmento $\overline{MN}$. Infine dato che $\overline{AM} = \overline{BN}$, E è il punto medio di $\overline{AB}$. Concludiamo quindi che $\triangle ABD$ è anche isoscele, l'angolo cercato è di 45 gradi.

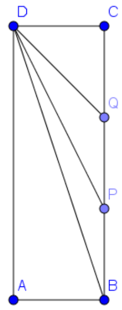


Problema 7 *Sia ABCD un rettangolo con* $\overline{BC} = 3\overline{AB}$ *e si prendano due punti P e Q su* $\overline{BC}$ *tali che* $\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QC}$.
Si dimostri $D\widehat{B}C + D\widehat{P}C = D\widehat{Q}C$.

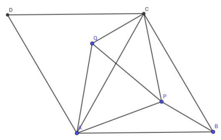
Soluzione: Costruiamo sulla base $\overline{AD}$ un triangolo identico a quello di prima. Proviamo che $\alpha + \beta \cong \frac{\pi}{4}$ (ovviamente $DQC \cong \frac{\pi}{4}$). Si ha
$B\widehat{P}Q \cong D\widehat{Q}C \cong \beta$ e anche $A\widehat{D}B \cong D\widehat{B}C \cong \alpha$. $\triangle BPC$ è quindi rettangolo ed anche isoscele. Quindi $P\widehat{B}D \cong B\widehat{D}P \cong \alpha + \beta \cong \frac{\pi}{4}$

Soluzione 2: Tutti e tre gli angoli sono minori di 90° gradi, quindi la tesi è soddisfatta se e solo se $\tan(D\widehat{B}C + D\widehat{P}C) = \tan(D\widehat{Q}C)=1$. Dato che
$\tan(D\widehat{B}C) = \frac{1}{3}$ e $\tan(D\widehat{P}C) = 1/2$ e ricordando la formula di addizione della tangente otteniamo $\tan(D\widehat{B}C + D\widehat{P}C) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}} = 1$.

Problema 8 *Sia* $\triangle$ *ABC equilatero, sia P un suo punto interno. Si traccino i segmenti che congiungono P con i vertici del triangolo. Sono noti* α *e* β *due degli angoli così formati con vertice in P. Si crei un nuovo triangolo avente lati* $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ *e* $\overline{CP}$ *e si determini la misura dei suoi angoli interni in funzione di* α *e* β.
Suggerimento: si consideri una copia del triangolo ruotata rispetto al vertice A di 60 gradi e si lavori sulla nuova figura formata affiancando i due triangoli.



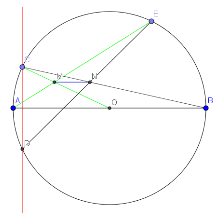
__Soluzione:__ Considera la figura, si ha che $\triangle$ BPQ per costruzione è proprio il triangolo di lati $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CP}$. $\triangle$ APQ è equilatero, infatti $P\widehat{A}Q \cong 60°$ e $\overline{AP} \cong \overline{AQ}$ per costruzione. Allora si ha $P\widehat{Q}B \cong \beta - A\widehat{Q}P \cong \beta - 60°$; $A\widehat{P}B \cong \alpha - B\widehat{P}Q \cong \alpha - 60°$; $P\widehat{B}Q \cong 180° - \beta + 60° - \alpha + 60° \cong \beta - 60°$ che sono appunto gli angoli cercati.



Problema 9 *Sia ω una circonferenza di diametro $\overline{AB}$ sia $\overline{CD}$ una corda perpendicolare ad $\overline{AB}$ sia E un punto sull'arco di circonferenza BC sia M il punto di intersezione tra i segmenti $\overline{AE}$ e $\overline{CO}$, N l'intersezione tra $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$, dimostrare che $\overline{MN}$ è parallelo ad $\overline{AB}$.*

__Soluzione:__ Per semplificazione pongo $\theta = C\widehat{B}A$ e $\alpha = B\widehat{A}E$. Si ha $C\widehat{E}A \cong \theta$ e $B\widehat{C}E \cong \alpha$ poiché sottendono lo stesso arco e $O\widehat{C}B \cong \theta$ poiché $\triangle OCB$ isoscele. Si ha $D\widehat{C}O \cong 90° - A\widehat{O}C \cong 90° - 2\theta$. Inoltre $C\widehat{D}E \cong \frac{1}{2}C\widehat{O}E \cong \frac{1}{2}(180° - A\widehat{O}C - B\widehat{O}E) \cong \frac{1}{2}(180° - 2\alpha - 2\theta) \cong 90° - \alpha - \theta$. Pertanto lavorando sul triangolo $\triangle ECD$ si ha $M\widehat{E}D \cong 180° - E\widehat{C}D - C\widehat{D}E - \theta \cong 180° - (\alpha + \theta + 90° - 2\theta) - (90° - \alpha - \theta) - \theta \cong \theta$. Quindi MNEC è ciclico poiché $M\widehat{E}N \cong N\widehat{C}M \cong \theta$; dunque anche $N\widehat{M}E \cong N\widehat{C}E \cong \alpha$ allora $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ per l'inverso del teorema di Talete.

Problema 10 *Siano a, b, c i tre lati di un triangolo ed S la sua area. Dimostrare che $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$ e dire quando vale l'uguaglianza.*



Soluzione: Qualunque sia il triangolo esiste un'altezza interamente contenuta in esso, sia AD tale altezza. Pongo per comodità h=AD, BD=m, DC=n e riscrivo la disuguaglianza nei termini di n, m, h.

$$a^2 + b^2 + c^2 = (m+n)^2 + (h^2 + n^2) + (h^2 + m^2) \geqslant h\frac{1}{2}(m+n)4\sqrt{3}$$

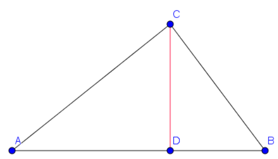
$$2h^2 + 2m^2 + 2n^2 + 2mn \geqslant 2\sqrt{3}(m+n)h$$

$$2h^2 - 2\sqrt{3}(m+n)h + 2(m^2 + n^2 + mn) \geqslant 0$$

da cui con il metodo del completamento dei quadrati ottengo:

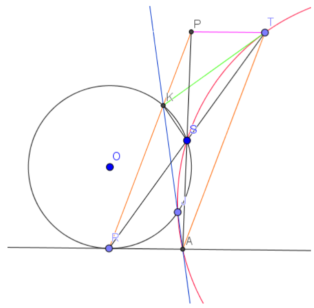
$$[h - \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)]^2 + [\frac{1}{2}(m-n)]^2 \geqslant 0$$

che è ovviamente vero. L'uguaglianza si ha solo se entrambi i termini sono nulli per cui $m = n$ e $h = \sqrt{3}m$ ovvero quando il triangolo è equilatero!



Problema 11 *(IMO 2017)*
Siano R e S due punti sulla circonferenza Ω, con $\overline{RS}$ non diametro. Sia l la tangente a Ω in R. Sia T il punto tale che S è punto medio di $\overline{RT}$. J sta sul più piccolo dei due archi RS di Ω ed è tale che la circonferenza Γ circoscritta a $\triangle JST$ interseca l in due punti distinti. Sia A il più vicino ad R di tali due punti; $\overline{AJ}$ interseca Ω in K. Dimostare che $\overline{KT}$ è tangente a Γ.

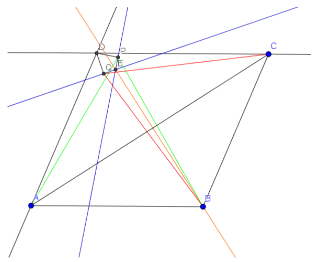
Soluzione: $RK \parallel AT$ infatti $A\widehat{T}S \cong 180° - S\widehat{J}A$ perché AJST è ciclico, $A\widehat{T}S \cong S\widehat{J}K \cong S\widehat{R}K$ sfruttando le proprietà degli angoli alla circonferenza. Da quest'ultima uguaglianza segue che $\overline{KR} \parallel \overline{AT}$. Sul prolungamento di RK prendiamo il punto P tale che ATPR sia un parallelogramma. RT ed AP sono le diagonali, quindi A, S, P sono allineati (le diagonali del parallelogramma si dimezzano a vicenda). Adesso $S\widehat{K}R \cong S\widehat{R}A \cong T\widehat{R}A \cong P\widehat{T}R \implies PKST$ è ciclico. $K\widehat{T}S \cong K\widehat{P}S$ poiché sottendono KS in un quadrilatero ciclico. $K\widehat{P}S \cong S\widehat{A}T$ allora KT è tangente a Γ in T.



Problema 12 *Sia $ABCD$ un parallelogramma, siano P e Q interni al parallelogramma tali che $\triangle ABP$ e $\triangle BCQ$ siano equilateri. Dimostra che l'intersezione tra il segmento perpendicolare a $\overline{PD}$ passante per P e il segmento perpendicolare a $\overline{DQ}$ passante per Q giace sull'altezza di $\triangle ABC$ di vertice B.*

Soluzione: Da $P\widehat{B}Q \cong Q\widehat{C}D \cong P\widehat{A}D \cong B\widehat{A}D - 60°$ e $BP \cong PA \cong CD$ e $BQ \cong QC \cong AD$ otteniamo $\triangle QBP \cong \triangle DAP \cong \triangle QCD \implies PQ \cong QD \cong DP$. Sia R l'intersezione tra le perpendicolari di PD in P e QD in Q e sia P' il punto in PR tale che $AP' \perp PR$ e A' il punto tale che P'AA'P è un rettangolo e similmente si definiscono Q'e C'. Quindi da $\triangle DAP \cong \triangle QCD$ otteniamo $AA' \cong DD' \implies PP' \cong AA' \cong DD' \cong QQ'$. Inoltre da $PR \perp P'A$ e $QR \perp Q'C$ otteniamo: $PA^2 - AR^2 \cong PP'^2 - RP'^2$... e $QC^2 - CR^2 \cong QQ'^2 - RQ'^2$... Da queste due equazioni otteniamo
$PA^2 - AR^2 \cong QC^2 - CR^2 \implies PA^2 + CR^2 \cong QC^2 + AR^2$, quindi da $PA \cong AB$ e $QC \cong CB$ otteniamo $AB^2 + CR^2 \cong BC^2 + AR^2$, quindi $AR \perp BC$.

Problema 13 *Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso e sia P l'intersezione tra $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Si ha inoltre $\overline{AC}+\overline{AD}=\overline{BC}+\overline{BD}$. Dimostra che la bisettrice degli angoli $A\widehat{C}B$, $A\widehat{D}B$ e $A\widehat{P}B$ si incontrano in un unico punto.*



Soluzione: Sia K il punto di incotro delle bisettrici di $A\widehat{C}B$ e $A\widehat{D}B$. Siano I e J rispettivamente gli incentri di $\triangle APD$ e $\triangle BPC$. Dal fatto che $A\widehat{P}I \cong \frac{1}{2}A\widehat{P}D \cong \frac{1}{2}B\widehat{P}C \cong J\widehat{P}C$ si dimostra che P, I e J sono allineati. Inoltre gli excentri di $\triangle APD$ rispetto a D e di $\triangle BPC$ rispetto a C giacciono entrambi sulla perpendicolare a $\overline{IJ}$ passante per P. Quindi segue che K coincide con entrambe gli excentri e che $\overline{KP} \perp \overline{IJ}$.
Pertanto $A\widehat{P}K \cong 90° - A\widehat{P}I \cong 90° - B\widehat{P}J \cong K\widehat{P}B$.
Quindi $\overline{KP}$ è la bisettrice di $A\widehat{P}B$ da cui la tesi.