Lezione 2 - Algebra

Problema 1 *Dimostrare che per qualunque a e b reali positivi ed n naturale si ha:*

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}$$

Soluzione: Applicando la disuguaglianza AM-GM alla $(n+1)$-upla $(a, b, b, ..., b)$ (dove la b è ripetuta n volte) si ha:

$$\sqrt[n+1]{a \cdot b \cdot b \cdot ... \cdot b} \leq \frac{a+b+b+...+b}{n+1}$$

da cui banalmente la tesi.

Problema 2 *Dimostrare la disuguaglianza*

$$\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1+b_1)^2 + \cdots + (a_n+b_n)^2}$$

Soluzione: Sono tutti termini positivi, quindi possiamo elevare al quadrato ottenendo la disuguaglianza equivalente:

$$\sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \geq$$

$$\geq \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sum a_i b_i$$

Cancellando le sommatorie uguali e applicando Cauchy-Schwarz si ha la tesi.

Problema 3 *Sia $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ un polinomio con coefficienti interi. Supponiamo che per quattro interi distinti a,b,c,d si abbia $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 7$. Dimostrare che non esiste nessun intero k tale che $P(k) = 12$.*

Soluzione: Consideriamo il polinomio $Q(x) = P(x) - 7$ che ha come radici a,b,c,d.
$Q(x) = (x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c) \cdot (x-d) \cdot R(x)$ con $R(x)$ un polinomio a coefficienti interi. Dimostrare che per k intero $P(k) = 12$ è analogo a dimostrare che $Q(x)$ non assume valore 5.
Ma $Q(k) = (k-a) \cdot (k-b) \cdot (k-c) \cdot (k-d) \cdot R(x)$ e poichè a,b,c,d sono interi distinti; almeno due numeri tra $(k-a)$,$(k-b)$,$(k-c)$,$(k-d)$ sono diversi ± 1 e quindi $Q(x)$ non può valere 5 poichè esso è un numero primo.

Problema 4 *Si determino gli interi positivi k tali che il polinomio $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + kx^2 + x + 1$ sia prodotto di polinomi a coefficienti interi di grado minore di 5.*

Soluzione: Il polinomio $P(x)$ è prodotto di due polinomi $P'(x)$ e $P''(x)$ con $P'(x)$ di grado 1, $P''(x)$ di grado 4 oppure $P'(x)$ di grado 2 e $P''(x)$ di grado 3. Nel primo caso si ha che $P(x) = (x-a) \cdot P''(x)$ e quindi a è una radice intera di $P(x)$ e può essere solo 1 (e quindi $k = -5$) o -1(e quindi $k = 1$), dovendo essere un divisore del termine noto di $P(x)$. Per il secondo caso si ha che i termini noti di $P'(x)$ e $P''(x)$ hanno come prodotto 1; dunque essi sono entrambi 1 o -1.

$$P(x) = (x^2 + ax + 1)(x^3 + bx^2 + cx + 1)$$

da cui segue

$$P(x) = x^5 + (a+b)x^4 + (1 + ab + c)x^3 + (b + ac + 1)x^2 + (a+c)x + 1$$

Uguagliando i coefficienti si ottiene $k = 1$. Se invece i termini noti sono entrambi di $P'(x)$ e $P''(x)$ sono entrambi -1 si ha:

$$P(x) = (x^2 + ax - 1)(x^3 + bx^2 + cx - 1)$$

da cui segue

$$P(x) = x^5 + (a+b)x^4 + (-1 + ab + c)x^3 + (ac - 1 - b)x^2 - (a+c)x + 1$$

Uguagliando i coefficienti si ottiene $k = 1$ e $k = -5$.

Problema 5 *(AoPS) Dati a,b,c reali distinti dimostrare che almeno 2 delle equazioni*

$$(x-a)(x-b) = x - c$$

$$(x-b)(x-c) = x-a$$
$$(x-c)(x-a) = x-b$$

hanno soluzioni reali.

Soluzione: Supponiamo, senza perdita di generalità, che le prime due equazioni non abbiano soluzioni (gli altri casi sono simmetrici). Sviluppando le prime due equazioni e imponendo il Δ di esse minore di 0 (basta notare che se $\Delta = 0$, si hanno due valori tra a, b e c uguali):

$$(a+b+1)^2 < 4(ab+c)$$
$$(b+c+1)^2 < 4(bc+a)$$

Sommando le due equazioni membro a membro e scomponendo abbiamo $(a-b-1)^2 + (b-c+1)^2 < 0$, per cui non esistono valori reali a, b, c che soddisfano l'ultima disuguaglianza.

Problema 6 *Determinare a, b reali tali che $(x-1)^2$ divida $ax^4 + bx^3 + 1$*

Soluzione: *Prima soluzione (lunga)*
$P(1) = 0$ implica che $a + b + 1 = 0$, inoltre, poste x_i le radici del polinomio con $x_3 = x_4 = 1$, per le formule di Viète si ha

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = 1 + 1 + x_1 + x_2 \\ \frac{1}{a} = x_1 x_2 \\ 0 = 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_2 + 1 \end{cases} \tag{1}$$

Sostituendo la seconda equazione nella terza e dopo qualche altro banale passaggio si trova che $-2b = 3a - 1$ e mettendo questa equazione con la prima condizione si ottiene che $a = 3$ e $b = -4$.
Soluzione breve Sapendo che $f(1) = f'(1) = 0 = a + b + 1 = 4a + 3b$ perché 1 è uno zero doppio, da cui si può ottenere la soluzione di sopra

Problema 7 *Dimostrare che per qualunque a,b,c reali positivi si ha:*

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$$

Soluzione: Applicando la disuguaglianza AM-GM tre volte alle coppie (a,b), (b,c) e (a,c) abbiamo:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \qquad b+c \geq 2\sqrt{bc} \qquad a+c \geq 2\sqrt{ac}$$

E moltiplicando le tre disuguaglianze membro a membro:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$$

Problema 8 *Trovare in quanti modi si può tassellare un rettangolo $2 \times n$ con pezzi 2×1 e pezzi 2×2.*

Soluzione: Risolviamo il problema in maniera ricorsiva; chiamiamo a_n il numero di modi per tassellare al passo n, allora trivialmente si ha che $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$. Studiamo ora in quanti modi possiamo costruire il rettangolo $n+2$. Abbiamo 3 casi: o l'ultimo pezzo è un 2×1 parallelo, e ci sono a_{n+1} modi per avere ciò, o gli ultimi 2 pezzi sono un 2×2 oppure 2 1×2 e ciò si può avere in a_n modi (ovviamente il caso di 2 2×1 paralleli rientra negli a_{n+1} modi). Si ha quindi che $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$.
Nota: la successione è univocamente definita avendo i primi due termini, ma la si può portare in forma chiusa con il solito metodo del polinomio caratteristico e trovare l'espressione $a_n = \frac{2}{3}(2)^n + \frac{1}{3}(-1)^n$.

Problema 9 *Un polinomio P a coefficienti interi ha almeno 13 radici intere distinte. Dimostrare che se un intero n non è una radice di P, allora $|P(n)| \geq 7 \cdot 6!^2$, e dare un esempio per l'uguaglianza.*

Soluzione: Siano $r_1, \ldots, r_{13}$ 13 radici intere distinte di P, allora

$$P(x) = Q(x) \prod_{k=1}^{13} (x - r_k)$$

Sia r intero tale che $P(r) \neq 0$ e quindi diverso da tutti gli r_k. Poichè può esistere al più una coppia di indici i, j tale che $|r - r_i| = |r - r_j| \neq 0$, allora

$$\left| \prod_{k=1}^{13} (x - r_k) \right| \geq (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)^2 \cdot 7 = 7 \cdot 6!^2$$

e quindi $|P(r)| \geq 7 \cdot 6!^2$. Un polinomio per cui vale l'uguaglianza è, per esempio,

$$P(x) = (x+7)\prod_{k=1}^{6}(x^2 - k^2)$$

con $P(0) = 7 \cdot 6!^2$

Problema 10 *Siano a_i, con i indice che varia fra 1 e 59, numeri reali appartenenti all'intervallo $[-2; 17]$ tali che:*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{59} = 0$$

Dimostare che

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_{59}{}^2 \leq 2006$$

Soluzione: Poniamo, per ogni i, $x_i = a_i + 2$. Si noti he tutti gli x_i appartengono all'intervallo $[0; 19]$ e quindi $\sum_{i=1}^{59} x_i = 118$. La tesi ora diventa:

$$\sum_{i=1}^{59} x_i{}^2 \leq 19 \cdot 118 = 19\sum_{i=1}^{59} x_i$$

Ma questo è vero poichè $x_i{}^2 \leq 19x_i$ per tutti gli i.

Problema 11 *Si considerino n persone in cerchio numerate da 1 a n. Iniziando a contare dalla prima, di ogni due persone consecutive si elimini la seconda e si stringa nuovamente il cerchio (per esempio al primo giro si elimineranno i numeri $2, 4, ..$). Definendo $f(n)$ il numero del sopravvissuto al variare di n, si trovi $f(100)$.*
Hint: si ragioni sulle relazioni fra $f(2n), f(2n+1)$ e $f(n)$.

Soluzione: Dimostriamo le seguenti espressioni:

$$f(2n) = 2f(n) - 1, \qquad f(2n+1) = 2f(n) + 1$$

Consideriamo di avere $2n$ persone, dopo il primo giro rimarranno la $1, 3, \ldots 2n-1$, a questo punto rinominiamole con $1, 2, 3 \ldots n$ e continuiamo; il sopravvissuto della posizione $f(n)$ di questa configurazione era quello della posizione $2f(n) - 1$ della configurazione originale. Analogamente per il caso dispari.
A questo punto avendo che $f(1) = 1$ banalmente, si può arrivare a $f(100)$ calcolando in sequenza $f(1), f(3), f(6), f(12), f(25), f(50), f(100) = 73$

Problema 12 *Trovare tutti i polinomi $p(x)$ tali che*

$$xp(x-1) = (x-26)p(x)$$

Soluzione: Si nota che

$$x|p(x) \Rightarrow x-1|p(x+-1) \Rightarrow x-2|p(x-2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow x-25|p(x-25)$$

Pertanto $p(x) = x(x-1)\cdots(x-25)q(x)$ e $p(x-1) = (x-1)(x-2)\cdot(x-26)q(x-1)$. Inserendo quest'ultima nell'equazione funzionale originale, si ottiene $q(x) = q(x-1)$ e pertanto $q(x) = a$ costante. Si conclude:

$$p(x) = ax(x-1)\ldots(x-25)$$

Problema 13 *(IMO 1975) Siano (x_i) e (y_i) con $1 \leq i \leq n$ due successioni di numeri reali tali che:*

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \qquad y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$$

Sia (z_i) una qualunque permutazione di (y_i). Dimostrare che:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

Soluzione: Sviluppando i quadrati si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

Semplificando, dopo aver notato che $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$ (le due somme differiscono solo per l'ordine):

$$-2\sum_{i=i}^{n} x_i y_i \leq -2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i$$

ovvero:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$$

L'ultima disuguaglianza è vera in quanto è, per definizione, la disuguaglianza di riarrangiamento applicata alle due sequenze entrambe crescenti (x_i) e (y_i) e alla successione (z_i), permutazione di (y_i). Essendo vera l'ultima disuguaglianza è vera anche quella di partenza.

Problema 14 *Siano $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi monici (ovvero tali che il coefficiente del termine di grado massimo sia 1) a coefficienti reali, e tali che $degP(x) = degQ(x) = 10$. Provare che se l'equazione $P(x) = Q(x)$ non ha soluzioni reali, allora $P(x+1) = Q(x-1)$ ammette soluzioni reali*

Soluzione: Scriviamo i due polinomi come

$$P(x) = x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_1x + a_0$$

$$Q(x) = x^{10} + b_9x^9 + \ldots + b_1x + b_0$$

Quindi:

$$P(x) - Q(x) = \sum_{i=1}^{9} (a_i - b_i)x^i$$

Ma poichè $P(x) - Q(x)$ ha coefficienti reali e solo soluzioni complesse, esso deve avere grado pari; quindi $a_9 = b_9 = k$, affinchè i termini di nono grado si cancellino nella sottrazione. Adesso abbiamo:

$$P(x+1) = (x+1)^{10} + a_9(x+1)^9 + \ldots + a_1(x+1) + a_0$$

$$Q(x-1) = (x-1)^{10} + b_9(x-1)^9 + \ldots + b_1(x-1) + b_0$$

E quindi:

$$P(x+1) - Q(x-1) = \sum_{i=1}^{10} a_i(x+1)^i - b_i(x-1)^i$$

Dove $a_{10} = b_{10} = 1$ e $a_9 = b_9 = k$, per quanto già detto. Vediamo adesso che il coefficiente di nono grado in $(x+1)^{10} - (x-1)^{10}$ è pari a 20, mentre in $k[(x+1)^9 - (x-1)^9]$ il termine di nono grado è 0, così come per tutti gli altri termini, che hanno grado inferiore a 9. In definitiva il coefficiente di nono grado in $P(x+1) - Q(x-1)$ è 20, quindi $deg[P(x+1) - Q(x-1)] = 9$. Poichè tale polinomio ha grado dispari l'equazione $P(x+1) - Q(x-1) = 0$ ammette almeno una soluzione reale, che è proprio ciò che volevamo dimostrare.

Problema 15 *Il polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ha coefficienti interi tali che $a \cdot d$ è dispari e $b \cdot c$ è pari. Inoltre tutte e tre le sue radici sono reali. Dimostrare che almeno una radice è irrazionale*

Soluzione: Supponiamo per assurdo che, dette x_i (per $i = 1, 2, 3$) le soluzioni di $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$,esse siano tutte razionali Moltiplicando per a^2 si ottiene:

$$(ax)^3 + b(ax)^2 + ca(ax) + da^2 = 0$$

Ponendo $y = ax$ e y_i le soluzioni della nuova equazione, le soluzioni razionali ora sono intere perchè il polinomio è monico a coefficienti interi (il denominatore di y_i deve dividere il coefficiente di terzo grado, quindi y_i è 1 o -1). Usando le formule di Viète abbiamo che $y_1y_2y_3 = -a^2d$ è dispari, quindi tutte e tre le soluzioni sono dispari. Inltre si osserva che $-b$ è pari alla loro somma, quindi dispari quindi c dovrebbe essere pari, ma ac, sempre per le formule di Viétè, è pari alla quantità $y_1y_3 + y_1y_2 + y_2y_3$ che è dispari, quindi anche c è dispari, che è assurdo. Quindi almeno una soluzione y_i è irrazionale e quindi anche $x_i = y_i/a$

Problema 16 *Siano a e b numeri reali positivi e m naturale diverso da zero. Provare che:*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}$$

Soluzione: Applicando la disuguaglianza AM-GM alle coppie $(1; \frac{a}{b})$ e $(1; \frac{b}{a})$ abbiamo:

$$1+\frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \qquad 1+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Da cui:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2^m\left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^m + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^m\right]$$

Applicando nuovamente AM-GM:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^m + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^m \geq 2\sqrt{\frac{a^m}{b^m}\frac{b^m}{a^m}} = 2$$

Ovvero la tesi, poichè:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq 2^m\left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^m + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^m\right] \geq 2^m \cdot 2 = 2^{m+1}$$

Problema 17 *Siano dati il polinomio $P(x)$ e i numeri reali a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 tali che $a_1a_2a_3 \neq 0$. Supponiamo che per ogni x si abbia:*

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3)$$

Dimostrare che il polinomio $P(x)$ ha almeno una soluzione reale.

<u>Soluzione:</u> Supponiamo per assurdo che il polinomio $P(x)$ non ammetta soluzioni reali.
$P(x)$ quindi ha segno costante, che possiamo supporre positivo senza perdita di generalità (possiamo eventualmente considerare $-P(x)$ se necessario).
$P(x)$ ha inoltre grado pari, in quanto non ammette soluzioni reali, ed ha un minimo assoluto $m > 0$.
Sia x tale che $P(a_3x + b_3) = m$ (ciò è possibile in quanto $a_3 \neq 0$), allora sia $P(a_1x + b_1)$ che $P(a_2x + b_2)$ sono minori di m, il che è assurdo. Avendo trovato la contraddizione, la tesi è vera, quindi $P(x)$ ammette almeno una soluzione reale.

Problema 18 *Sia $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ polinomio con coefficienti razionali di grado n tale che per ogni intero m maggiore di un certo m_0 il numero $p(m)$ sia intero. Dimostra che il numero $n! \cdot a_n$ è intero.*

<u>Soluzione:</u> Se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti razionali che assume valori interi per ogni intero m maggiore di un certo m_0, allora le stesse proprietà valgono per il polinomio $P(x+1)$. Consideriamo il polinomio $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Esso ha coefficienti razionali e assume valori interi per ogni intero m maggiore di un certo m_0. Inoltre il termine di grado massimo di $Q(x)$ è $n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$). Consideriamo il polinomio $R(x) = Q(x+1) - Q(x)$. Esso gode delle stesse proprietà di $Q(x)$ e il coefficiente di grado massimo di $R(x)$ è $n \cdot (n-1) \cdot a_nx^{n-2}$. Così proseguendo, dopo n passi si otterrà il polinomio $S(x) = n! \cdot a_n$. Poiché $S(x)$ è costante, e assume valori interi per ogni intero m maggiore di un certo m_0, si ha che $n! \cdot a_n$ è intero.

Problema 19 *Dati 4 reali positivi tali che $2(a+b+c+d) \geq abcd$ provare che:*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd$$

<u>Soluzione:</u> Supponiamo per assurdo che $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < abcd$; usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz applicata alle quaterne (a, b, c, d) ed

$(1,1,1,1)$ (o in alternativa la disuguaglianza AM-QM applicata alla quaterna (a,b,c,d)) otteniamo:

$$2(a+b+c+d) \geq abcd > a^2+b^2+c^2+d^2 \geq \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2$$

Quindi

$$a+b+c+d < 8 \qquad (2)$$

Utilizzando AM-GM otteniamo:

$$abcd > a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4\sqrt{abcd}$$

Quindi

$$\sqrt[4]{abcd} > 2 \qquad (3)$$

Usando infine (1), (2) e AM-GM abbiamo:

$$2 > \frac{1}{4}(a+b+c+d) \geq \sqrt[4]{abcd} > 2$$

assurdo. Quindi la tesi è vera.

Problema 20 *Si definisca (a_n) una sequenza di numeri positivi come:*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ (n^2+1)a_{n-1}^2 = (n-1)^2 a_n^2 \end{cases}$$

Dimostrare che:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} \leq 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a_n^2}}$$

Soluzione: Si definisca $b_i = \frac{1}{a_i^2}$. Quindi si ha:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n(n^2+1) = b_{n-1}(n-1)^2 \end{cases}$$

Dobbiamo provare che:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leq 1 + \sqrt{1 - b_n}$$

Si noti che $b_n = b_{n-1}(n-1)^2 - b_n(n^2)$ quindi la somma $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ è telescopica:

$$b_1+b_2+\ldots+b_n = b_1+(b_1\cdot 1^2-b_2\cdot 2^2)+(b_2\cdot 2^2-b_3\cdot 3^2)+\ldots+[b_{n-1}(n-1)^2-b_n(n^2)] =$$

$$= 2 - b_n \cdot n^2$$

è quindi sufficiente mostrare che $1 - b_n \cdot n^2 \leq \sqrt{1-b_n}$. Basta notare che, se $0 < b_n \leq 1$, $0 \leq 1 - b_n < 1$, possiamo quindi concludere:

$$1 - b_n \cdot n^2 \leq 1 - b_n \leq \sqrt{1-b_n}$$

Problema 21 *(Metà problema IMO 1991)*
Sia ABC un triangolo qualsiasi, le bisettrici AD, BE, CF si incontrano nel punto I. Dimostrare che:

$$\frac{IA}{AD}.\frac{IB}{BE}.\frac{IC}{IE} \leq \frac{8}{27}$$

Hint:le bisettrici dividono il lato opposto in segmenti il cui rapporto è quello degli altri due lati.

<u>Soluzione:</u> Chiamiamo a,b,c i lati opposti agli omonimi vertici e p,q i segmenti indicati nella figura di sotto.

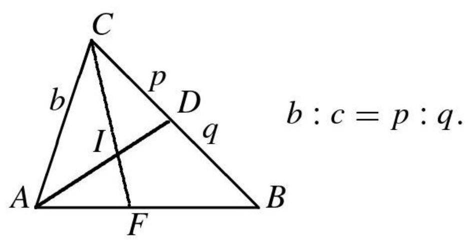

Figura 1: triangolo bisecato

Sfruttando l'hint si ha:

$$p = CD = \frac{ab}{b+c}, \qquad q = DB = \frac{ac}{b+c}$$

Osservando che la bisettrice CF è bisettrice anche per il triangolo CAD, ed analogalmente per le altre, si ottiene:

$$\frac{AI}{ID} = b : p = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{AI}{AD} = \frac{AI}{AI+ID} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

In modo simile,

$$\frac{BI}{BE} = \frac{c+a}{a+b+c}, \quad \frac{CI}{CF} = \frac{a+b}{a+b+c}$$

Passando ora alla disuguaglianza e applicando (indovinate un po') la AM-GM si ha:

$$\frac{IA}{AD} . \frac{IB}{BE} . \frac{IC}{IE} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{(a+b+c)^3} . \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$