Lezione 1 - Introduzione e combinatoria

Problema 1 *Dimostrare che* $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

Soluzione: Sappiamo che $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Il problema si riduce quindi a dimostrare $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = [\frac{n \cdot (n-1)}{2}]^2$. Procediamo per induzione. Passo base: per $n = 1$ si ha $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{2^2} = 1$. Il passo base è verificato. Passo induttivo: supponiamo sia vera la relazione $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = [\frac{n \cdot (n-1)}{2}]^2$; dimostriamo che vale $1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = [\frac{(n+1) \cdot (n)}{2}]^2$. Si ha $1 + 2 + \ldots + n + (n+1)^3 = [\frac{n \cdot (n-1)}{2}]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \cdot (\frac{n^2}{4} + n + 1) = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$ da cui la tesi.

Problema 2 *Quanti sono gli anagrammi senza doppie della parola superiore?*

Soluzione: La parola *Superiore* contiene 9 lettere tra cui due r e due e. I suoi anagrammi sono quindi $\frac{9!}{2! \cdot 2!} = 90720$. Da questi dobbiamo togliere quelli in cui compaiono le due r o le due e vicine. Poniamo le doppie $rr = R$, $ee = E$. Gli anagrammi con la doppia rr si contano come quelli della parola $Rsupeioe$ che sono $\frac{8!}{2!} = 20160$. Analogamente, gli anagrammi contenenti la doppia ee si contano come quelli della parola $Esuprior$ che sono anche loro 20160. In entrambi i casi abbiamo contato le parole contenenti entrambe le doppie rr ee. Questi ultimi anagrammi si calcolano come quelli di $REsupio$ che sono $7! = 5040$. Il numero cercato è quindi $90720 - 20160 - 20160 + 5040 = 55440$.

Problema 3 *Siano dati 27 numeri dispari minori di 100. Dimostrare che fra questi numeri esiste una coppia la cui somma è 102.*

Soluzione: Innanzitutto notiamo che $102 = 51 + 51$; chiaramente questa non è una coppia valida perchè, i numeri devono essere diversi. Le coppie di numeri dispari inferiori a 100 che formano 102 sono: $49 + 53; 47 + 55; \ldots; 3 + 99$

(la coppia 101+1, non è valida, dato che i numeri dispari scelti sono tutti inferiori a 100). In totale, quindi le coppie di questi numeri che formano 102, sono 24, dato che 24 sono i numeri dispari compresi tra 51 e 100 (51 escluso) o che 24 sono i numeri dispari compresi tra 1 e 50 (1 escluso); tali coppie, in totale, sono formate da 48 numeri dispari tutti diversi e minori di 100 (ossia tutti i numeri dispari minori di 100, escluso 1 e 51). Quindi, dati 27 numeri dispari minori di 100, mettendoci nel caso peggiore, cioè ammettendo di avere 1 e 51 (che non possono formare coppie valide) tra i 27 numeri, ne restano 25 dispari; dato che le coppie possibili sono 24, allora, tra i 27 numeri iniziali vi è almeno una coppia di numeri la cui somma da 102.

Problema 4 *Quanti sono gli anagrammi della parola binomiale che hanno la proprietà di avere le prime quattro lettere distinte tra loro e in ordine alfabetico?*

Soluzione: La parola *binomiale* contiene 9 lettere di cui solo la i si ripete due volte. Contiamo inizialmente le parole contenenti la i tra le prime quattro. Le altre tre lettere da inserire tra le prime quattro posizioni insieme alla i si possono scegliere in $\binom{7}{3} = 35$ modi possibili (ricordiamo che le i non possono essere prese). Scelte le lettere, l'ordine in cui disporle è univocamente determinato ed è l'ordine alfabetico. Questi 35 andranno moltiplicati per il numero di permutazioni delle restanti 5 lettere tutte distinte che sono $5! = 120$. Adesso contiamo quelle in cui non compare la i tra le prime quattro lettere. Il numero di modi in cui si possono scegliere 4 lettere tra le possibili 7 (nove meno le due i) sono ancora una volta $\binom{7}{4} = 35$, mentre le permutazioni di quelle restanti sono $\frac{5!}{2!} = 60$, dove il fattore 2! al denominatore è dato dalla presenza delle due i. Il numero cercato è quindi $35 \cdot 120 + 35 \cdot 60 = 6300$.

Problema 5 *Sia S_{2018} l'insieme $\{1, 2, ..., 2018\}$. Per ogni sotto-insieme non vuoto di S_{2018}, moltiplichiamo tra loro i suoi elementi. Quanto vale la somma totale di tutti i $(2^n - 1)$ prodotti?*

Soluzione: Lavoriamo sull'insieme generico S_n. Immaginiamo di avere già i prodotti degli elementi di tutti i suoi sotto-insiemi e cerchiamo di trovarli per S_{n+1}. Dato un addendo qualsiasi P relativo a S_n, inserendo in S_n l'elemento $(n+1)$ abbiamo due possibilità, includerlo in P (moltiplicando P per $(n+1)$) oppure no. Da questo deduciamo che $A_{n+1} = (n+1)A_n + A_n + (n+1)$ e per induzione si vede che $A_n = (n+1)! - 1$.

Problema 6 *Quanti sono gli anagrammi della parola combinatoria in cui le consonanti sono in ordine alfabetico?*

Soluzione: La parola *combinatoria* contiene 6 consonanti e 6 vocali. Gli anagrammi cercati saranno di questo tipo: `_b_c_m_n_r_t_` dove al posto di `_` possono esserci più vocali, una o nessuna vocale. Chiamo operazione A inserire una vocale, e operazione B spostarmi da un `_` a quello successivo. Sia v una generica vocale della parola *combinatoria*. Cerchiamo quindi anagrammi del tipo: $vbcvmvvnrvtv$. Per costruire questo anagramma abbiamo usato, in ordine, le seguenti operazioni: $ABBABAABBABA$. Da questo esempio si intuisce che, per costruire un tale anagramma, dobbiamo necessariamente compiere 6 volte l'operazione A e 6 volte l'operazione B. Per calcolare quindi il numero di anagrammi richiesti basta contare in quanti modi possiamo compiere le 12 operazioni ($6A$ e $6B$) che è equivalente a contare le parole composte da $6A$ e da $6B$ in cui ogni lettera indica un'operazione. Tal numero è $\binom{12}{6} = 924$. Questi andranno moltiplicati per tutte le permutazioni delle vocali di *combinatoria*, (contiamo quindi gli anagrammi di *oiaoia*) che sono $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 120$. $924 \cdot 120 = 110880$.

Problema 7 *Dimostrare che esiste un multiplo di 67 cifre di* 2^{67}, *composto esclusivamente dalle le cifre 6 e 7*

Soluzione: Ci sono esattamente 2^{67} numeri a 67 cifre contenenti solo le cifre 6 e 7. La differenza di due qualsiasi di questi non è divisibile per 2^{67} poiché è espressa come somma o differenza di potenze di 10 più piccole di 10^{67}. Quindi, questi 2^{67} numeri hanno a due a due resti diversi nella divisione con 2^{67}, e poiché ci sono 2^{67} resti possibili, (da 0 a $2^{67} - 1$) ci deve essere un numero (esattamente uno) che ha resto 0 e quindi è divisibile per 2^{67}.

Problema 8 *In quanti modi posso ottenere* 12 *come somma di* 5 *interi positivi?*

Soluzione: Consideriamo i cinque interi positivi come contenitori di semplici unità. Il problema è quindi analogo a calcolare in quanti modi possiamo disporre $12 - 5 = 7$ unità nei 5 contenitori ciascuno avente già una prima unità (ricordiamo che i cinque interi sono positivi e quindi > 0). Per comodità chiamiamo l'operazione di mettere un'unità in un contenitore operazione A e l'operazione di cambiare contenitore in cui inserire unità operazione B. Per completare l'inserimento di tutte e spostarsi dal primo all'ultimo intero, si devono necessariamente compiere $7A$ e $5-1=4B$. Basta quindi contare gli anagrammi di una parola composta da $7A$ e $4B$: $\binom{11}{4}=330$.

Problema 9 *Sia S un sotto-insieme di $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, tale che la somma degli elementi di tutte le coppie non ordinate di S è sempre diversa. Esempio: $S=\{1,2,3,5\}$ è valido ma non $S=\{1,2,3,4\}$ perché $\{1,4\}$ e $\{2,3\}$ hanno la stessa somma. Trova la cardinalità massima di S.*

Soluzione: Tutte le possibili somme vanno da 3 a 17, quindi sono 15. Dato che l'insieme di tutte le coppie di un insieme di almeno 7 elementi è maggiore di 15, abbiamo $|S|<7$. Se $|S|=6$ tutte le sue coppie sono esattamente 15; ma questo implicherebbe per forza che $1,2,8$ e 9 appartengono ad S, però $2+8=9+1$. Quindi $|S|\leq 5$. Ed in effetti 5 è la risposta esatta, perchè $S=\{2,5,7,8,9\}$ è valido.

Problema 10 *Trova quante sono tutte le coppie (x,y) di interi positivi $x\leq y$ tali che il massimo comune divisore tra x e y è uguale a $5!$ e il minimo comune multiplo è $50!$*

Soluzione: Poichè il massimo comune divisore tra x e y è uguale a $5!$, allora $x=5!u$, $y=5!v$ e quindi il minimo comune multiplo tra u e v è 1. Allora $mcm(x,y)=5!uv=50!$. Quindi:

$$uv=50!/5!=2^{44}\cdot 3^{21}\cdot 5^{11}\cdot 7^{8}\cdot 11^{4}\cdot 13^{3}\cdot 17^{2}\cdot 19^{2}\cdot 23^{2}\cdot 29\cdot 31\cdot 37\cdot 41\cdot 43\cdot 47$$

Quindi tutti i modi per scegliere x e y corrispondono a tutti i modi per partizionare in due insiemi A,B l'insieme

$$P=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,39,31,37,41,43,47\}$$

in modo che a u vadano i fattori di A con i relativi esponenti ed a v quelli di B con i relativi esponenti, ricordando che dobbiamo avere $u\leq v$, i modi possibili sono $\frac{2^{15}}{2}$.

Problema 11 *Alla Scuola Media di Catania, tutti gli studenti sanno che la somma tra gli interi è associativa, ovvero $(a+b)+c=a+(b+c)$. Federico tuttavia non si fida e presi $n\geq 2$ interi distinti calcola la loro somma ponendo le parentesi in tutti i modi possibili (senza cambiare l'ordine degli addendi). Mostrare che Federico studia sempre non meno di 2^{n-2} casi*

Soluzione: Procediamo per induzione. Quando $n = 1$ esiste certamente un solo modo di sommare due interi, dunque $P(1) = 1$. Analogamente per $n = 2$ esiste un solo modo di porre le parentesi, da cui $P(2) = 1 \geq 2^0$. Cerchiamo quindi una formula ricorsiva che ci consenta di applicare l'ipotesi induttiva. Dati gli n interi, per ogni scelta delle parentesi esiste sempre una somma più esterna. Questa divide la sequenza di interi in due sottosequenze, di lunghezza i ed $n-i$, in cui le parentesi possono essere messe in $P(i) \cdot P(n-i)$ modi. Dunque

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(i)P(n-i) = 2P(1)P(n-1) + \sum_{i=2}^{n-2} P(i)P(n-i) \geq 2P(n-1)$$

Dall'ipotesi induttiva allora

$$P(n) \geq 2P(n-1) \geq 2 \cdot 2^{n-3} = 2^{n-2}$$

Problema 12 *In quanti modi si può piastrellare un pavimento rettangolare di dimensioni* 2×10 *con mattonelle anch'esse rettangolari di dimensioni* 2×1 *come nell'esempio in figura 1?*

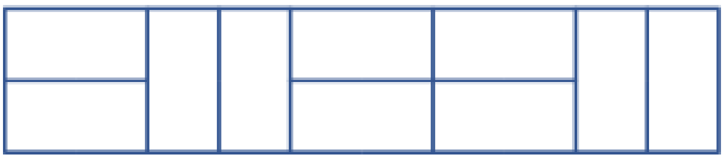

Figura 1

Soluzione: Consideriamo in generale un rettangolo di dimensioni $2 \times n$ e chiamiamo X_n il numero di modi in cui lo si può piastrellare con rettangolini 2×1. Cerchiamo una legge ricorsiva che ci permetta di risolvere il problema. L'operazione di piastrellamento può iniziare in soli due differenti modi:

1) Messa la prima orizzontalmente, la seconda copre necessariamente il buco lasciato dalla prima.

2) Si posiziona semplicemente una mattonella verticalmente.

Nel primo caso il numero di modi in cui posso continuare a piastrellare è X_{n-2}, perché con la mossa iniziale verrà occupato soltanto un quadrato

Figura 2

Figura 3

2×2 rimanendo da piastrellare un rettangolo di dimensioni $2 \times (n-2)$ mentre nel secondo analogamente è X_{n-1}. La legge ricorsiva che cercavamo è: $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$. Calcoliamo a mano X_1 e X_2 e da questi ricaviamo X_{10} che è esattamente ciò che ci chiede il problema. $X_1 = 1$ banalmente, mentre $X_2 = 2$ (il primo caso in cui due mattonelle sono posizionate verticalmente una accanto all'altra, il secondo in cui le mattonelle sono posizionate orizzontalmente una sopra l'altra).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Figura 4

Il numero richiesto è 89

Problema 13 *Una parola di Dyck è una stringa consistente di n simboli X ed n simboli Y tale che, preso comunque un segmento iniziale della stringa, esso non contenga più simboli Y che simboli X (ad esempio per $n = 2$, la stringa $XXYY$ è una parola di Dyck perché tutti i segmenti $(X; XX; XXY; XXYY)$ non contengono più Y che X) . Calcolare il numero di parole di Dyck di lunghezza* 12*.*

Soluzione: Immaginiamo una qualsiasi parola di Dyck come una serie di comandi X e Y che una pulce deve fare per arrivare a destinazione. Nello specifico il comando X indica alla pulce di andare verso destra, mentre quello

Y di dirigersi verso l'alto. Notiamo che, fissata la lunghezza della stringa in questione, la pulce dopo aver compiuto tutti i comandi si ritroverà nella stessa posizione finale indipendentemente dalla parola di Dick "eseguita", dal momento che avrà svolto lo stesso numero di comandi X e Y. Siano $(0;0)$ le coordinate della posizione di partenza e $(n;n)$ quelle della posizione finale con n il numero di comandi X o Y. Contare tutti i possibili percorsi della pulce significherebbe trovare il numero di parole di Dyck di lunghezza $2n$. Notiamo che la pulce non potrà mai oltrepassare verso l'alto le posizioni di coordinate del tipo $(k;k)$ con $K = 0, 1, 2, \ldots, n$ perché per costruzione di una parola di Dyck, preso comunque un segmento iniziale della stringa dei comandi, esso non conterrà più simboli Y che X. Il numero di tali percorsi è il numero di Catalan: $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ e per n uguale 6 si ha il risultato richiesto. $C_6 = \frac{1}{7} \cdot \binom{12}{6} = 132$.

Problema 14 *Dimostrare che ogni $n \in \mathbb{N}^*$ può essere scritto come somma di numeri di Fibonacci distinti.*

<u>Soluzione</u>: Procediamo per induzione forte. Per $n = 1$ la tesi è banalmente vera. Applichiamo l'ipotesi induttiva supponendo che $\forall m < n$ valga la tesi. Dimostriamo che la tesi vale per n. Ci sono due casi:

1. $n = F_k$ per qualche $k \Rightarrow$ tesi.

2. n non è un numero di Fibonacci. Allora $\exists k$ tale che $F_k < n < F_{k+1}$. Consideriamo alora $h = n - F_k$. Per ipotesi induttiva h si scrive come somma di numeri di Fiboacci distinti, allora n si potrebbe scrivere come $h + F_k$. Bisogna controllare che F_k non sia stato usato per scrivere h, ma $n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k+1}$, da cui $n - F_k < F_{k-1} < F_k$, ovvero $h < F_k$, allora F_k non si può usare per scrivere h.

Problema 15 *In una festa con N persone, in ogni gruppo di 4 persone ci sono 3 persone che si conoscono a vicenda oppure ci sono 3 persone che non si conoscono l'uno con l'altro. Dimostra che puoi dividere le persone in due stanze, tali che nella stanza A si conoscono tutti a vicenda e nella stanza B nessuna coppia di persone si conosce.*

<u>Soluzione</u>: Si consideri l'insieme S più grande di persone che si conoscono reciprocamente e si mettano tutti i suoi elementi nella stanza A, il resto delle persone va nella stanza B. Siano v e u due persone qualsiasi nella stanza B; dobbiamo dimostrare per assurdo che non si conoscono: prendiamo allora due persone (non necessariamente distinte) x e y da A tali che x non conosce u e y non conosce v (questo è sempre possibile altrimenti S non sarebbe massimale). Se x è diverso da y allora $\{u, v, x, y\}$ non soddisfa le ipotesi, se v ed u si conoscono (se invece $x = y$ e non esistono altre alternative ad y) possiamo scartare x ed inserire in A sia u che v, quindi S non sarebbe massimale.

Problema 16 *La squadra di calcio della Ssc è formata da 7 componenti ognuno con il proprio numero preferito sulla maglia (erano tutti diversi uno dall'altro). Il giorno della finale delle Xcool decisero di andare in campo in modo che ogni giocatore indossasse una maglia con un numero diverso dal proprio… tranne il portiere. Il portiere senza il suo numero di maglia non avrebbe più fatto i miracoli che gli Sscini erano abituati a vedere. Allora in quanti modi i restanti 6 giocatori sarebbero potuti scendere in campo?*

Soluzione: Consideriamo i 6 calciatori come cassetti numerati da 1 a 6 in cui bisogna mettere una maglietta ciascuno. Inoltre, per semplicità, immaginiamo le magliette numerate con il numero uguale a quello assegnato al giocatore propretaio. Denotiamo A_0 l'insieme di tutte le disposizioni delle sei magliette nei sei cassetti. Denotiamo A_1 l'insieme di tutte le disposizioni delle magliette nei cassetti che hanno la seguente proprietà: il cassetto 1 contiene la maglia 1. Allo stesso modo di A_1 definiamo A_2, A_3, …, A_6. Indichiamo infine con $|B|$ la cardinalità di un generico insieme B. Il problema richiede quindi di calcolare $|A_0| - |\bigcup_{i=1}^{6} A_i|$. Gli insiemi A_1, …, A_6 non sono però disgiunti e la cardinalità della loro unione non è banalmente la somma delle singole cardinalità dei suddetti insiemi. Per il principio di inclusione-esclusione si ha:

$$|\bigcup_{i=1}^{6} A_i| = \sum_{1 \leq i \leq 6} |A_i| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq 6} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \leq j \leq k \leq 6} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots - |\bigcap_{i=1}^{6} A_i|$$

$|\bigcup_{i=1}^{6} A_i|$ è banalmente 6!, non ci rimane altro che calcolare tali sommatorie. Fissata la i-esima maglietta nell'i-esimo cassetto, le altre 5 si possono disporre in 5! modi. Quindi si ha $\sum_{1 \leq i \leq 6} |A_i| = \binom{6}{1} \cdot 5!$ dove il $\binom{6}{1}$ è il numero di modi in cui posso scegliere i. Nel secondo caso fissiamo le magliette i e j nei rispettivi cassetti. Le altre le posso permutare in 4! modi mentre in $\binom{6}{2}$ modi posso scegliere i e j da cui segue: $\sum_{1 \leq i \leq j \leq 6} |A_i \cap A_j| = \binom{6}{2} \cdot 4!$. In maniera analoga mi calcolo le altre sommatorie e si ottiene:

$|\bigcup_{i=1}^{6} A_i| = \sum_{1\leq i\leq 6} |A_i| - \sum_{1\leq i\leq j\leq 6} |A_i \cap A_j| + \sum_{i\leq j\leq k\leq 6} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots - |\bigcap_{i=1}^{6} A_i| = 6! - (\binom{6}{1} \cdot 5! - \binom{6}{2} \cdot 4! + \binom{6}{3} \cdot 3! - \binom{6}{4} \cdot 2! + \binom{6}{5} \cdot 1! - \binom{6}{6} \cdot 1!) = 6! \cdot (\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}) = 360 - 120 + 30 - 6 + 1 = 265.$

Problema 17 *In quanti modi posso scrivere* 9 *come somma di* 1 *,* 2 *o* 3 *?*

Soluzione: Impostiamo il problema in modo ricorsivo. Poniamo X_n il numero di modi in cui si può scrivere n come somma di 1 , 2 o 3. Possiamo iniziare la nostra sequenza di interi in tre modi diversi: 1) Con 1 , la sequenza si completa con X_{n-1} modi 2) Con 2 , la sequenza si completa con X_{n-2} modi 3) Con 3 , la sequenza si completa con X_{n-3} modi. La legge ricorsiva cercata è quindi: $X_n = X_{n-1} + X_{n-2} + X_{n-3}$. Da questa, e dalle condizioni iniziali, ricaviamo X_9. Le condizioni iniziali sono: $X_1 = 1$ $[(1)]$ $X_2 = 2$ $[(1+1),(2)]$ $X_3 = 4$ $[(1+1+1),(1+2),(2+1),(3)]$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_n	1	2	4	7	13	24	44	81	149

Figura 5

Il numero richiesto è 149

Problema 18 *Pensiamo alla coda che si può formare al botteghino di un teatro, in una situazione di questo tipo: il biglietto di ingresso costa* 25 *euro e alla cassa si presenta un gruppo di* 20 *persone, metà delle quali con la cifra esatta in contanti e l'altra metà con un biglietto da* 50 *euro. In quanti modi diversi si possono mettere in fila queste persone per consentire al cassiere di iniziare con la cassa vuota e di avere poi sempre a disposizione il resto necessario?*

Soluzione: Per risolvere questo esercizio ci riallacceremo al *problema* riguardante le parole di Dyck. In particolare cercheremo di mostrare l'equivalenza dei due problemi. Chiamiamo X una qualsiasi persona che possiede la somma di 25 euro esatta e Y una qualsiasi persona che invece possiede soltanto una banconota da 50 euro. Il cassiere avrà il resto a disposizione solo quando, presa una qualsiasi sequenza (di lunghezza variabile) di gente in coda, non ci siano più persone con solo la banconota da 50 che le altre che hanno 25 euro esatti. Se per assurdo esistesse una sequenza che non rispetta tale proprietà, vi sarebbe una persona Y che non potrebbe ricevere il resto già del tutto esaurito dalle precedenti Y. Di fatto il problema richiesto è analogo a calcolare tutte le stringhe di $10X$ e $10Y$ con la proprietà sopra spiegata che è esattamente quella che contraddistingue le parole di Dyck. Il numero richiesto è quindi il numero di Catalan $C_{10} = \frac{1}{11} \cdot \binom{20}{10} = 16796$.

Problema 19 *(Esercizio 9 della gara a squadre finale nazionale 2017):*
Il gran rifiuto
Poiché nessuno di loro aveva il coraggio di assumersi il fardello del papato, Fibonaccio VII e Cardanino V decisero di giocarselo alle carte, peccando così ancora più gravemente. Essi avevano un mazzo di 52 carte, numerate da 1 a 13 con quattro copie per ogni numero. Ognuno di loro ne pescò una; qual era la probabilità che quella pescata da Fibonaccio recasse un numero più alto di quella di Cardanino? Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

Soluzione: E' facile capire che la probabilità che Fibonaccio peschi una carta con un numero più alto rispetto a Cardanino è uguale a quella che Fibonaccio ha di pescarne una con un numero più basso rispetto al suo avversario. Il problema quindi si riduce a calcolare la probabilità che entrambi i giocatori peschino carte con lo stesso valore, calcolare la probabilità contraria e dividere per due. Tutte le possibili coppie di carte pescabili sono $\binom{52}{2}$, mentre tutte quelle che sono formate da due carte con lo stesso valore sono $\frac{52 \cdot 3}{2!}$ dove il 3 rappresenta il numero delle carte restanti uguali a quella pescata per prima. La probabilità quindi di tale evento è $\frac{1}{17}$ (dato dal rapporto dei casi favorevoli su casi possibili). Segue che la probabilità che la carta pescata da Fibonaccio recasse un numero più alto di quella di Cardanino è: $\frac{1-\frac{1}{17}}{2} = \frac{8}{17}$. Il numero richiesto era quindi 25

Problema 20 *(Esercizio 12 della gara a squadre semifinale 2017):*
Scacchiera incompleta
Giunti ad una locanda lungo il cammino, dopo essersi ristorati, uno dei viandanti tirò fuori una scacchiera da viaggio: era composta da 4 scacchiere 5×5 che composte insieme formavano una scacchiera 10×10; mentre la stava montando, in particolare quando mancava solo il quadrante in basso a destra, si fermò a guardare quella figura a forma di L rovesciata e si chiese: "Quanti saranno i percorsi che portano dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra?". Un matematico rispose: "Infiniti ovviamente! Però se aggiungiamo l'ipotesi che ci si può muovere solo verso l'alto o verso destra, diventa un problema non banale. Qual è la sua soluzione?".

Soluzione: Per comodità chiamiamo l'operazione di spostarci verso l'alto operazione A e l'operazione di spostarci verso destra operazione B. Inizialmente possiamo considerare la scacchiera completa per calcolare tutti i percorsi che vanno dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra. Per eseguire questo tipo di percorso bisogna usare 9 volte l'operazione A e 9 volte l'operazione B. Per calcolare in quanti modi possiamo usare le 18 operazioni (9 A e 9 B) possiamo immaginare una parola composta da $9A$ e da $9B$ in cui ogni lettera indica un'operazione. Dobbiamo quindi calcolare tutti gli anagrammi di una parola del tipo $AAAAAAAAABBBBBBBBB$ che sono $\binom{18}{9} = 48620$. In questo modo abbiamo però calcolato tutti i possibili percorsi in una generica scacchiera 10×10. Per calcolare i possibili percorsi nella scacchiera in cui manca il "quarto quadrante" possiamo immaginare la scacchiera completa tagliata dalla diagonale che va dalla casella in alto a sinistra alla casella in basso a destra, una metà dei percorsi precedentemente calcolati passeranno per la metà della diagonale contenuta nel "secondo quadrante" e l'altra metà che passerà per la parte di diagonale contenuta nel "quarto quadrante". Quindi per calcolare il numero di percorsi richiesti basta calcolare i percorsi della generica scacchiera 10×10 e dividerli per 2: $\frac{48620}{2} = 24310$.

Problema 21 *(Esercizio 13 della gara a squadre semifinale 2017):*
Sortite casuali
"Io ho studiato attentamente le strategie militari delle crociate", affermò uno dei pellegrini, appena ebbero superato il campo di addestramento. "In particolare, durante l'assedio di Gerusalemme ogni giorno gli arabi tentavano una sortita da una delle quattro diverse porte della città, situate nei quattro punti cardinali. Il primo giorno di assedio usarono la porta a Nord, e dal secondo giorno adottarono uno stratagemma particolare per disorientare l'esercito di Goffredo di Buglione: all'alba tiravano una moneta, e se fosse uscita testa sarebbero usciti dalla stessa porta del giorno precedente, altrimenti da quella successiva in senso antiorario. (la successione è quindi Nord-Ovest-Sud-Est)". Qual è la probabilità che il 52*-esimo giorno di assedio gli arabi prendano la porta a Nord? Dare come risposta le ultime quattro cifre della somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione: Per semplicità consideriamo un qualsiasi caso possibile una sequenza di lettere N, W, S, E lunga 52 che inizi con N e che rispecchi la seguente proprietà: ogni lettera ha come successiva se stessa o quella seguente della successione $(N; W; S; E)$. Chiameremo una tale sequenza "favorevole"

se essa termina con N. I casi possibili in cui gli arabi avrebbero potuto assediare Gerusalemme sono banalmente 2^{51}, perché ogni giorno (tranne il primo) gli arabi hanno sempre due possibilità diverse di uscita da Gerusalemme, determinata appunto dal lancio della moneta e analogamente sono 2^{51} tutte le possibili sequenze (da ora in poi con sequenza si intende un qualsiasi sequenza di lettere N, W, S, E precedentemente descritte). Per calcolare tutti i casi in cui al 52-esimo giorno di assedio gli arabi prendano la porta a Nord, calcoliamo tutte le sequenze favorevoli. Studiamo il problema in maniera ricorsiva. Poniamo N_n il numero di sequenze di lunghezze n che terminano con N, W_n il numero di sequenze di lunghezze n che terminano con W e analogamente S_n e E_n. Per costruzione si ricavano facilmente le seguenti formule ricorsive:
1) $N_n = N_{n-1} + E_{n-1}$
2) $W_n = W_{n-1} + N_{n-1}$
3) $S_n = S_{n-1} + W_{n-1}$
4) $E_n = E_{n-1} + S_{n-1}$
Sappiamo inoltre le condizioni iniziali: $N_1 = 1$ (l'uscita a Nord del primo giorno); $W_1 = 0$; $S_1 = 0$; $E_1 = 0$. Da queste ricaviamo N_n, W_n, S_n, E_n per i primi n e cerchiamo quindi, ulteriori relazioni per poter calcolare N_{52} che è esattamente ciò che ci serve per risolvere il quesito.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N_n	1	1	1	1	2	6	16	36	72	136	256	496	992
W_n	0	1	2	3	4	6	12	28	64	136	272	528	1024
S_n	0	0	1	3	6	10	16	28	56	120	256	528	1056
E_n	0	0	0	1	4	10	20	36	64	120	240	496	1024

Figura 6

Dalla tabella possiamo notare alcune relazioni:
1) $W_{4n-3} = E_{4n-3}$; $N_{4n-2} = W_{4n-2}$;$S_{4n-2} = E_{4n-2}$;$N_{4n-1} = S_{4n-1}$; $N_{4n} = E_{4n}$; $W_{4n} = S_{4n}$
2) $N_n + W_n + E_n + S_n = 2^{n-1}$ (questo risultato indica il numero di sequenze totali di lunghezze n che avevamo precedentemente calcolato nel caso specifico di $n = 52$)
3) $N_{4n}\breve{\ }W_{4n} = (-1)^n 2^{2n-1}$ (ve ne sono tante altre che permettono di determinare univocamente ogni numero che compone la tabella ma noi ci concentriamo su questa che è quella che ci permettere di risolvere il problema; invito il lettore a trovarle tutte e dimostrarle quindi per induzione)
Da 1) 2) e 3) abbiamo:
a) $N_{52} + W_{52} + E_{52} + S_{52} = 2^{51}$
b) $N_{52} = E_{52}; W_{52} = S_{52}$

c) $N_{52} \breve{} W_{52} = (-1)^{13} \cdot 2^{25}$
Dalla *a*) e dalla *b*) otteniamo $2N_{52} + 2W_{52} = 2^{51}$. Ricaviamo W_{52} dalla *c*) e sostituiamo nella relazione precedentemente trovata: $4N_{52} + 2 \cdot 2^{25} = 2^{51}$. Segue che $N_{52} = 2^{49} - 2^{24}$. Dividendo per 2^{51} otteniamo la probabilità p cercata: $p = (2^{25} - 1)/2^{27}$. Con un po' di calcoli (e un po' di teoria dei numeri) si ricava che il numero richiesto è 2159.

Problema 22 *(Esercizio 13 della gara a squadre finale nazionale 2017): L'inferno speciale*
"Questo è un girone speciale", mi disse Cartesio, "riservato a chi si macchia di colpe gravi, come semplificare addendi nelle frazioni oppure parlare al cinema." Eran presenti in questo settore solo 14 *dannati, numerati da* 1 *a* 14*. Ogni dì, un diavolo sceglieva alcuni di essi (a volte anche nessuno di loro, se erano particolarmente fortunati), e ordinava ad ognuno dei prescelti di portare sulle spalle una quantità di macigni variabile tra* 1 *e* 56*. Ogni giorno, tali quantità erano scelte in ordine crescente: un prescelto con un numero più grande ne doveva portare una quantità strettamente maggiore. In quanti modi diversi potevano essere abbinati ogni giorno dannati e macigni? Si risponda indicando la somma dei numeri primi distinti presenti nella fattorizzazione del risultato.*

Soluzione: Il numero di modi possibili di scegliere n (compreso tra 0 e 14) dannati tra i 14 totali è $\binom{14}{n}$. Fissato n, il numero dei dannati scelti dal diavolo, calcoliamo in quanti modi possiamo abbinare gli n dannati a n numeri di macigni. Si hanno $\binom{56}{n}$ modi di scegliere tali numeri tra i 56 possibili. Scelti questi, c'è solo un modo di poterli abbinare ai dannati: il dannato numerato con il numero più piccolo avrà il minor numero di macigni e così via fino ad abbinare il dannato con il numero più elevato al più grande numero di macigni dell'ennupla scelta. Quindi per n fissato, il numero di modi per abbinare dannati e macigni saranno $\binom{56}{n} \cdot \binom{14}{n}$. Per calcolare quanti sono quelli totali basta sommare tutti i 15 termini ottenuti facendo variare n da 0 a 14. Il numero cercato è quindi: $\sum_{n=0}^{14} \binom{56}{n} \cdot \binom{14}{n}$. Data la difficoltà del calcolo cerchiamo di trasformare questa somma in qualcosa di più semplice ed elegante. A scopo di ciò consideriamo una scacchiera 15 x 57 e una pulce che si trova nella casella di coordinate $(1;1)$. Sappiamo contare tutti percorsi che la pulce può compiere per arrivare nella casella all'estremità opposta muovendosi soltanto verso destra o verso l'alto. Nello specifico essi sono $\binom{70}{14}$. Adesso immaginiamo di calcolare tali percorsi sommando tutti quelli passanti per le caselle di coordinate $[(15;1), (14;2), (13;3), \ldots, (2;14), (1;15)]$. Tali caselle formano una diagonale che divide perfettamente la scacchiera di partenza in due parti e ciò ci assicura di non dimenticare di contare nessun percorso che dovrà necessariamente passare per una delle caselle. Inoltre per la loro particolare disposizione non esiste nessun percorso permesso dalla pulce che passi per più di una di quelle caselle, assicurandoci di non contare lo stesso percorso più volte. I percorsi che passano dalla $(15;1)$ sono $\binom{14}{0} \cdot \binom{56}{0}$, quelli che passano per la $(14;2)$ sono $\binom{14}{1} \cdot \binom{56}{1}$ e così via fino alla casella $(1;15)$ attraverso la quale passano $\binom{14}{14} \cdot \binom{56}{14}$. La somma di questi è $\sum_{n=0}^{14} \binom{56}{n} \cdot \binom{14}{n}$, esattamente quello che stavamo cercando. Ma come già detto prima il numero dei possibili tragitti che la pulce può compiere per arrivare nella casella opposta in una tale scacchiera è $\binom{70}{14}$. La soluzione del nostro problema è quindi $\sum_{n=0}^{14} \binom{56}{n} \cdot \binom{14}{n} = \binom{70}{14}$ da cui è più facile calcolare la somma dei numeri primi distinti presenti nella sua fattorizzazione. Il numero richiesto risulta 316.

Problema 23 *(Esercizio 20 della gara a squadre finale nazionale 2017):*
La mensa delle normali
"Il conte Ugobbino", fece il vate, "si macchiò di una colpa orribile." "Pisano?" chiosai, con l'umorismo delle mie genti, ma Cartesio ignorò le mie burle. "Imprigionato dai suoi inimici, subito tracciò una retta sul muro. Poi ogni giorno lanciò una moneta; se usciva testa, egli tracciava una retta perpendicolare alla prima, se usciva croce una parallela. Aveva tracciato 99 *rette oltre alla prima, quando la fame lo costrinse al bieco pasto." Qual è il numero medio di regioni in cui il piano cui appartiene il muro della cella viene diviso da queste rette?*

<u>Soluzione</u>: Per comodità chiameremo le rette parallele alla prima di tipo N e di tipo M quelle perpendicolari. Inoltre indicheremo rispettivamente con n e m il numero di rette N e M che sono state tracciate nel piano. Cerchiamo di capire quante sono le regioni del piano in cui viene diviso per n e m qualsiasi (per adesso non teniamo in conto della prima retta tracciata ma cerchiamo di risolvere il problema in maniera generale). Per creare una disposizione di rette di tipo N o M, immaginiamo che le n rette N siano già state tracciate e vediamo cosa succede quando aggiungo alla configurazione una di tipo M. Inizialmente (per $m = 0$), si vede facilmente che il piano viene diviso in $n + 1$ regioni. Quando tracciamo la prima retta M, essa incontrerà tutte le n rette già presenti nel piano raddoppiando le regioni del piano. Tracciamo la seconda M e supponiamo di farlo alla sinistra della prima retta M. Tutte le $n + 1$ regioni alla sinistra della prima M verranno divise in due aumentando di fatto di $n + 1$ regioni la configurazione precedente per un totale di $3(n + 1)$ regioni. Analogamente per ogni retta M che

aggiungiamo, le regioni aumenteranno di $n+1$ (il ragionamento può essere fatto simmetricamente con N e M scambiate di ruolo). Si ricava quindi che per una qualsiasi disposizione di n rette di tipo N e m di tipo M, il piano viene diviso in $(n+1)\cdot(m+1)$ regioni (tale formula si può dimostrare per induzione ma noi non la trattiamo). Il problema richiede il numero medio di regioni in cui il piano viene diviso dalle 100 rette (ricordiamo che la prima è di tipo N). Dal momento che il tipo di retta tracciata di volta in volta dipende dal lancio di una moneta, il numero totale di possibili sequenze di 99 rette di tipo N o M sono 2^{99}. Supponiamo adesso di vedere il muro della cella dopo i 100 giorni e di vedere una configurazione di n N e m M con $n+m=100$ e $n>0$ (sappiamo che la prima è di tipo N). Il numero di modi diversi in cui Ugobbino avrebbe potuto arrivare a tale configurazione è $\binom{99}{n-1}=\binom{99}{m}$. Segue che la media cercata è $\frac{\sum_{m=0}^{99}\binom{99}{m}\cdot(n+1)\cdot(m+1)}{2^{99}}$. Tale somma non siamo in grado di calcolarla, esprimerla come una o più somme di coefficienti binomiali invece ci consentirebbe di arrivare al risultato. A tal fine, sostituiamo n con $100-m$ e scriviamo $[(100-m)+1)]\cdot(m+1)$ come somma di opportuni coefficienti binomiali.
$(101-m)\cdot(m+1)=-m^2+100m+101=99m-(m^2-m)+101=99\cdot\binom{m}{1}-2\cdot\binom{m}{2}+101$.
Da questo segue:
$\binom{99}{m}\cdot(n+1)\cdot(m+1)=\binom{99}{m}\cdot[99\cdot\binom{m}{1}-2\cdot\binom{m}{2}+101]=99^2\cdot\binom{98}{m-1}-99\cdot 98\cdot\binom{97}{m-2}+101\cdot\binom{99}{m}$.
Inseriamo quindi i vari "pezzi" nelle sommatorie e otteniamo:
$99^2\cdot\sum_{m=1}^{99}\binom{98}{m-1}-99\cdot 98\cdot\sum_{m=2}^{99}\binom{97}{m-2}+101\cdot\sum_{m=0}^{99}=99^2\cdot 2^{98}-99\cdot 98\cdot 2^{97}+101\cdot 2^{99}$.
Dividiamo per 2^{99} e otteniamo la media cercata che risulta $\frac{99^2}{2}-\frac{99\cdot 98}{2^2}+101=2576$.