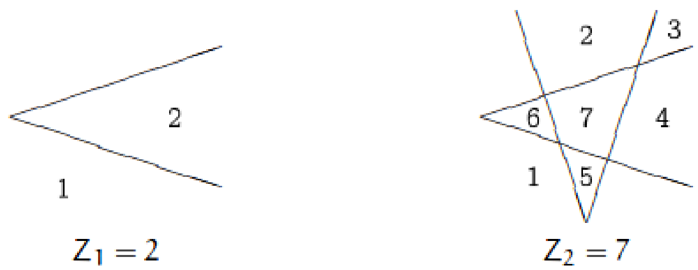
IV Stage Olimpiadi SSC - Gara finale

Problema 1 *Definiamo trancio una linea piegata nel piano formata da due semirette che hanno origine nello stesso punto (vedi figura). Qual è il massimo numero Z_n di regioni in cui viene diviso il piano da n tranci? Può essere utile ricondursi al caso in cui il piano viene diviso da semplici rette.*



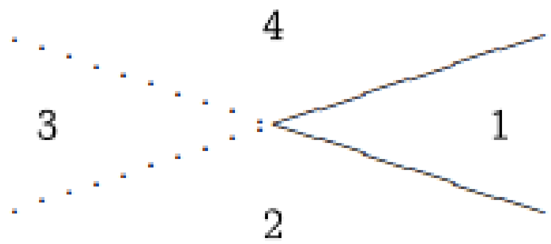
<u>Soluzione:</u> Contiamo inizialmente quante sono il massimo numero di regioni in cui il piano viene diviso da n rette. Iniziamo con l'osservare che la configurazione di rette che divide il piano nel maggior numero di regioni è quella in cui le rette sono tutte distinte, non vi sono coppie di rette parallele e tre o più rette non possono passare per il medesimo punto.

Indichiamo con r_n il massimo numero di regioni in cui il piano viene diviso da n rette. Ovviamente $r_0 = 1$: se non ho alcuna retta il piano viene suddiviso in un'unica regione: il piano stesso. Poi si ha:

- $r_1 = 2$
- $r_2 = 4$
- $r_3 = 7$

Un ragionamento di tipo induttivo ci permetterà di ottenere facilmente una relazione tra r_{n+1} ed r_n. Se inseriamo una nuova retta che rispetta le ipotesi dette sopra, questa intersecherà le n rette pre-esistenti in altrettanti punti restando così suddivisa in $n + 1$ parti ($n - 1$ segmenti e due semirette), ciascuna delle quali divide in due ogni regione che attraversa. Avremo così: $r_{n+1} = r_n + n + 1$. Se applico tale formula al caso in cui inseriamo una

n-esima retta dopo $n-1$ rette pre-esistenti avremo: $r_n = r_{n-1} + n$. La seconda formula risponde alla domanda che ci eravamo posti. Con un facile ragionamento possiamo però trasformare la formula ricorsiva trovata in una equivalente "forma chiusa" cioè in una formula che ci permette di esprimere direttamente r_n in funzione di n. Applichiamo ripetutamente la formula:
$r_0 = 1$,
$r_1 = r_0 + 1$,
$r_2 = r_1 + 2$,
$\dots$
$r_{n-1} = r_{n-2} + n - 1$, $r_n = r_{n-1} + n$.
Sommando membro a membro le precedenti uguaglianze avremo:
$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} + r_n = 1 + r_0 + 1 + r_1 + 2 + \cdots + r_{n-2} + n - 1 + r_{n-1} + n$.
Semplificando i termini uguali a primo e a secondo membro avremo:
$r_n = 1 + [1 + 2 + \cdots + (n-1) + n] = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.
Ricolleghiamoci al problema dei tranci. Osserviamo che un trancio divide il piano equivalentemente a due linee rette che si intersecano ma con l'eccezione che le 3 regioni formate oltre il punto d'incontro vengono unificate in un'unica regione (le regioni 2, 3 e 4 in figura che sarebbero distinte con due linee, diventano una singola regione), perdiamo quindi due regioni.



Per ottenere il massimo numero di regioni ogni qual volta che aggiungiamo un trancio alla nostra configurazione, l'origine delle due semirette di tal trancio deve stare al di là delle intersezioni con le altre linee. Rispetto alla divisione del piano con $2n$ rette perdiamo quindi, soltanto due regioni per ogni coppia di rette. Risulta:

$$Z_n = R_{2n} - 2n = 1 + \frac{2n \cdot (2n+1)}{2} - 2n = 2n^2 - n + 1$$

Problema 2 *Sia $P(x) = x^3 - 10x^2 + 30x - 26$ un polinomio e siano x_i le sue soluzioni, con $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Calcolare $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ e dimostrare che:*

$$\left(\frac{2}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2^2}\right) \leq \frac{75}{169}$$

Soluzione: Per le formule di Viète $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{15}{13}$.
Il primo membro si può scrivere come $\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_1x_3} = \left(\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \cdot \frac{1}{x_1}\right)$ che è la sommatoria mista di due successioni, una crescente e una decrescente, quindi per Chebycheff :

$$3\left(\frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1x_3}\right) \leq \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{225}{169}$$

Da cui la tesi.

Problema 3 *Trovare tutte le potenze di 2 tali che, eliminando la cifra più a sinistra, si ottiene ancora una potenza di 2.*

Soluzione: Dobbiamo trovare due numeri $k, h \in \mathbb{N}$ tali che

$$2^k = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$$
$$2^h = 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$$

con $0 \leq a_i \leq 9 \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}$, e $a_n \neq 0$.

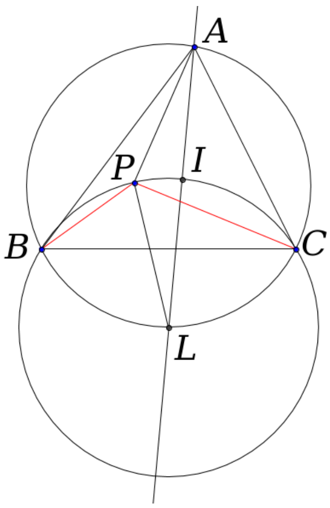
Ovvero $2^k - 2^h = 10^n a_n$, e poiché $h < k$, si ha $2^h(2^{k-h} - 1) = 10^n \cdot a_n$. Il secondo membro è multiplo di 5, quindi lo è anche il primo, in particolare $2^{k-h} \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow k-h \equiv 0 \pmod 4$, allora possiamo scrivere $k-h = 4z$. Scomponiamo il primo membro dell'equazione in modo da ottenere

$$2^h(2^z + 1)(2^z - 1)(2^{2z} + 1) = 10^n \cdot a_n.$$

Osserviamo che i tre fattori $(2^z+1)(2^z-1)(2^{2z}+1)$ sono a due a due coprimi, perché (2^z+1) (2^z-1) sono coprimi e $(2^z+1)(2^z-1) = (2^{2z}-1)$ e $(2^{2z}+1)$ sono coprimi. Essendo inoltre tutti dispari, se sono tutti maggiori di 1, al primo membro devono esserci tre fattori primi dispari distinti. Ma al secondo membro ce ne possono essere al massimo 2 (perché $1 \leq a_n \leq 9$). Allora uno tra $(2^z+1), (2^z-1), (2^{2z}+1)$ deve essere 1, e questo è possibile solo nel caso $z = 1$. Sostituendo si ottiene $2^h(2^4-1) = 2^h \cdot 15 = 10^n a_n$. Al primo membro c'è solo un fattore 5, per cui $n = 1$. A questo punto si vede facilmente che a_n può essere solo 3 o 6. Le uniche potenze di due che soddisfano la richiesta sono allora 32 e 64.

Problema 4 *Sia ABC un triangolo e sia I il suo incentro. Sia P un punto interno ad ABC tale che $P\widehat{B}A + P\widehat{C}A = P\widehat{B}C + P\widehat{C}B$. Dimostrare che $AP \geq AI$ e che l'uguaglianza vale solo se $P = I$.*
(Suggerimento: indicato con L il punto di intersezione tra la bisettrice dell'angolo in A e la circonferenza circoscritta, B, I e C stanno su una circonferenza di centro L).

<u>Soluzione</u>:



Risulta

$$\widehat{B} + \widehat{C} = P\widehat{B}A + P\widehat{C}A + P\widehat{B}C + P\widehat{C}B = 2(P\widehat{B}C + P\widehat{C}B).$$

Inoltre

$$B\widehat{P}C = 180° - P\widehat{B}C - P\widehat{C}B = 180° - \frac{1}{2}(\widehat{B}+\widehat{C}) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \widehat{A}) = 90° + \frac{\widehat{A}}{2},$$

in aggiunta $B\widehat{I}C = 180° - \frac{1}{2}(\widehat{B}+\widehat{C}) = 90° + \frac{\widehat{A}}{2}$, quindi $B\widehat{I}C = B\widehat{P}C$. I punti P e I vedono il segmento BC sotto lo stesso arco, quindi B, P, I e C stanno su una stessa circonferenza. Adesso $LB = LI = LC$ per il lemma dell'incentro-excentro. Quindi P sta su questa stessa circonferenza in quanto conciclico a B, I, C. Considero il triangolo $A\widehat{P}L$, per la disuguaglianza triangolare $AP + PL \geq AL$ che è equivalente ad $AP + LI \geq AI + LI$. Quindi $AP \geq AI$. L'uguaglianza vale se $P = I$ perché la disuguaglianza triangolare diventa un uguaglianza in quanto i punti sono allineati.

Problema 5 *Gibbi ha invitato $n-1$ persone a sedersi alla tavola rotonda SSC (quindi in totale ci sono n persone sedute). All'inizio Gibbi ha n bicchieri davanti a sé. A ogni passo, se una persona ha almeno due bicchieri può passarne uno alla persona alla sua destra e l'altro alla sua sinistra. Per quali n è possibile raggiungere la configurazione in cui tutti hanno solamente un bicchiere?*

Soluzione: Assegnamo a partire dal posto di Gibbi in senso orario i pesi $1, 2, \ldots, n$ ai vari posti. Detto a_i il numero di bicchieri nel posto i-esimo, consideriamo la quantità $S = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i$. Analizziamo come questa varia dopo una mossa. Indichiamo con $M(i)$ la mossa della persona al posto i. Distinguiamo tre casi.

- Se viene effettuata la $M(i)$ con $2 \leq i \leq n-1$, la quantità S non cambia. Infatti detta S' tale quantità dopo $M(i)$ si ha

$$S' = S - 2i + (i-1) + (i+1) = S.$$

- Se viene effettuata $M(1)$ si avrà

$$S' = S - 2 + n + 2 = S + n.$$

- Se viene effettuata $M(n)$ si avrà

$$S' = S - 2n + 1 + (n-1) = S - n.$$

Pertanto in ogni caso la quantità $S \pmod{n}$ è un invariante. Dunque poiché nella configurazione iniziale $S_{in} = 1 \cdot n = n \equiv 0 \pmod{n}$, mentre nella configurazione che si vuole raggiungere si ha $S_{fin} = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dobbiamo studiare la divisibilità di S_{fin} per n.
Se vogliamo che $S_{fin} = \frac{n(n+1)}{2}$ sia divisibile per n allora

$$\frac{n(n+1)}{2} = kn$$
$$n^2 + n = 2kn \Rightarrow n = 2k - 1,$$

cioè n deve essere dispari. In questo caso si verifica facilmente che la configurazione finale può essere raggiunta.