III Stage Olimpiadi SSC - Gara finale

Problema 1 *Gli allievi della Scuola Superiore sono soliti organizzare delle enormi feste di fine sessione, per festeggiare la fine del periodo di esami. Durante queste feste, i ragazzi organizzano giochi pazzi e ciccioni, per riprendersi dalle fatiche dello studio.*
Quest'anno, gli allievi (che sono in numero dispari) si trovano in piedi nel giardino accanto al plesso Puffo, a distanze mutuamente distinte. Nello stesso istante ogni persona lancia una torta alla persona che gli stà più vicino. Dimostra che c'è almeno un allievo che (purtroppo per lui) non viene colpito da nessuna torta.

Problema 2 *Durante l'ultima pizzolata della Scuola Superiore, Federico e Alfredo si sono abbandonati (pizzolo alla mano) ad una delle loro lunghissime discussioni. Mentre Alfredo è intento a raccontare per la millesima volta i suoi leggendari successi su Italia 1, Federico, come suo solito, ne approfitta per proporre un problema di Algebra.*
Il problema del giorno è il seguente: sia $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ *un polinomio a coefficienti reali e con tutte le soluzioni reali e sia* $a < 0$ *e* $b > 0$. *Dimostrare che:*

$$-a \geq 4.$$

Problema 3 *Ogni anno, alla festa delle matricole della Scuola Superiore, il geniale Alessio Borzì è solito attraccare le ignare matricole con la sua storica frase ad effetto: "Ciao! Sai che il numero 3458120394*[1] *ha due particolarità? Può essere scritto come somma di cinque cubi (non tutti positivi), ed è il mio numero di telefono!"*
Sapreste smontare il bluff del geniale Alessio Borzì, e provare che ogni numero può essere scritto come somma di cinque cubi (non necessariamente positivi)?

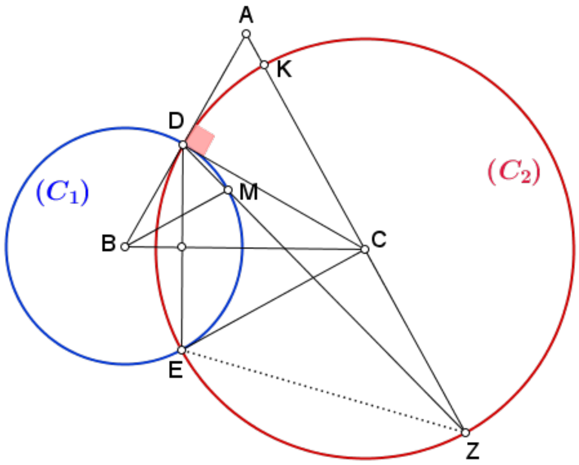
(Suggerimento: Sapreste scrivere i numeri della forma $6k$ *come somma del minor numero di cubi perfetti possibile?)*

Problema 4 *All'ultima festa "Arrusti e mancia" della Scuola Superiore, Filippo si è abbuffato di carne! Per poter digerire meglio l'enorme mole*

[1] Il numero è reale, e può essere utilizzato per scopi legati allo stage. Fatene buon uso.

di puntine, polpette e tramezzini, ha deciso di riflettere su un altrettanto pesante problema di Geometria. Ha tracciato quindi un triangolo isoscele acutangolo ABC ($AB \cong AC$), avente altezza CD, e due circonferenze; la prima circonferenza, denotata con C_1, ha centro B e raggio BD, mentre la seconda circonferenza, denotata con C_2, ha centro C e raggio CD. Sia ora K il punto di intersezione tra la circonferenza C_2 e il segmento AC, e sia Z l'altra intersezione di C_2 con la retta contenente il segmento AC. Infine, ha denotato con E l'altro punto di intersezione (oltre D) tra le circonferenze C_1 e C_2, e con M l'altro punto di intersezione (oltre D) tra il segmento ZD e la circonferenza C_1. Filippo, nel pieno della digestione, vorrebbe mostrare che:

1. *Il segmento BE è tangente a C_2*
2. *L'angolo $Z\widehat{D}E$ ha ampiezza $\frac{\pi}{4}$ (o equivalentemente 45 gradi).*
3. *I punti E, M, K sono allineati.*
4. *$BM \parallel EC$*



Problema 5 *Ogni anno, nel periodo di Natale, gli ex-allievi della scuola superiore ritornano a Villa San Saverio, per ritrovarsi tra loro e conoscere i nuovi allievi. In particolare, quest'anno, i mille ex-allievi della scuola si sono quindi ritrovati nelle storiche 100 stanze di Villa San Saverio. Inoltre, ogni minuto, a meno che tutti gli ex allievi si trovino nella stessa stanza, qualcuno va dalla stanza in cui si trova ad un'altra che ha almeno lo stesso numero di persone della stanza che sta lasciando, per salutare o scambiare quattro chiacchiere. Sapreste provare che, prima o poi, tutti gli ex-allievi si troveranno nella stessa stanza?*