# Lezione 5 - Invarianti e Teoria dei Giochi

**Problema 1** *Una sala d'albergo, in cui sta per cominciare una conferenza, risulta essere inizialmente vuota. Il numero di persone nella sala varia molto velocemente: ogni minuto succede che una persona entra o due escono. Dopo* $3^{3^{3^3}}$ *minuti, è possibile che nella sala ci siano* $3^{3^3}+1$ *uditori?*

***Soluzione:***

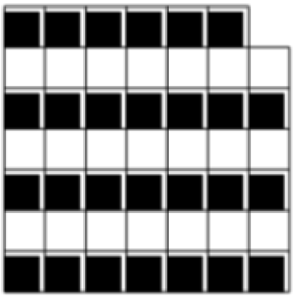
Osserviamo che, detto $N$ il numero di persone presenti nella sala, la quantità $N \pmod 3$ aumenta di 1 ogni minuto. Dunque, poiché sono passati un numero di minuti multiplo di 3, deve essere $N_f \equiv N_i \equiv 0 \pmod 3$, il che è assurdo poiché $N_f \equiv 1 \pmod 3$.

**Problema 2** *Dato un* $k \geq 2$ *intero, Alessio e Borzì fanno il seguente gioco: a turno Alessio scrive due interi consecutivi su una lavagna in modo che non ci sia alcuna coppia di numeri uguali, e Borzì ne cancella uno. Alessio vince quando riesce a scrivere* $k$ *interi consecutivi. Per quali* $k$ *Alessio ha una strategia vincente?*

***Soluzione:*** Solo per $k = 2, 3$. Se infatti Borzì cancella sempre il numero pari della coppia scritta da Alessio, all'$n$-esimo turno, quando Alessio muove, c'è un solo pari sulla lavagna, da cui la sequenza massima di consecutivi ha lunghezza al più 3.

**Problema 3** *Un vertice di una scacchiera* $(2n+1) \times (2n+1)$ *viene rimosso. Per quali* $n$ *è possibile coprire i quadrati rimanenti con delle tessere* $2 \times 1$*, in modo tale che metà di esse siano messe in orizzontale?*

***Soluzione:*** Coloriamo la griglia come in figura. Ci sono $2n^2 + n$ quadrati bianchi e $2n^2 + 3n$ neri, per un totale di $4n^2 + 4n$ quadrati. quindi servono $2n^2 + 2n$ tessere per coprirli, in particolare $n^2 + n$ orizzontali e $n^2 + n$ verticali. Ogni tessera verticale copre quadrati di colore diverso. quando tutte le tessere verticali sono posizionate, esse coprono $n^2+n$ quadrati neri e $n^2+n$ bianchi. I rimanenti $n^2$ bianchi e $n^2+2n$ neri devono essere ricoperti da tessere orizzontali, che coprono quadrati dello stesso colore. Quindi, per coprire gli $n^2$ quadrati bianchi, $n^2$ deve essere pari. Quindi è possibile ricoprire griglie del tipo $(4n+1)\times(4n+1)$ ma non griglie del tipo $(4n-1)\times(4n-1)$.



**Problema 4** *Consideriamo la seguente griglia di numeri.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

*Ogni mossa consiste nel mettere una casella adiacente a quella vuota al posto di quest'ultima. E' possibile raggiungere la configurazione in cui 14 e 15 sono scambiati?*

***Soluzione:*** Chiamiamo 16 il quadratino mancante. Ogni volta che il 16 torna nella posizione in basso a destra, è stato fatto un numero pari di mosse; la permutazione risultante di $1, 2, ..., 16$ è pari, mentre la seconda è dispari, perchè ottenuta facendo un solo scambio tra i numeri. Quindi non può essere raggiunta.

**Problema 5** *Agli estremi di una scacchiera $n\times 1$ sono posizionati un pedone nero ed uno bianco. A turno il signor Bianchi e la signora Neri muovono*

*il pezzo del proprio colore avanti o indietro di una o due caselle, senza mai scavalcare il pedone avversario. Inizia Bianchi e perde chi non può più muovere.*
*Per quali $n$ la signora Neri vince?*

***Soluzione:*** Osserviamo che per $n = 3, 4$ i bianchi vincono, mentre per $n = 5$ vincono i neri.
Vogliamo provare induttivamente che per $n = 3k + 2$ i Neri vincono e altrimenti perdono, allora assumiamo la tesi per $3(k-1)$, $3(k-1)+1$, $3(k-1)+2$.

1. se $n = 3k$ Bianchi fa un passo avanti portandosi al caso $3(k-1)+2$ con i colori scambiati ed ha una strategia vincente per ipotesi induttiva
2. se $n = 3k+1$ Bianchi fa due passi avanti portandosi al caso $3(k-1)+2$ con i colori scambiati ed ha una strategia vincente per ipotesi induttiva
3. se $n = 3k + 2$ qualsiasi mossa faccia bianchi si riporterà a uno dei due casi precenti, da cui Neri, ora il primo giocatore, ha una strategia vincente

**Problema 6** *Un pavimento rettangolare è stato ricoperto con mattonelle $2 \times 2$ e $4 \times 1$. Purtroppo una mattonella si rompe e c'è solo una mattonella dell' altro tipo disponibile per la riparazione. Mostrare che il pavimento non può essere ricoperto ridisponendo le mattonelle.*

***Soluzione:***

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 |

Coloriamo il pavimento come in figura. Osserviamo che una casella $2 \times 2$ copre una casella di ogni colore, mentre una casella $1 \times 4$ ne copre sempre due di un colore e due di un altro colore. Da ciò segue banalmente la tesi.

**Problema 7** *Dato un polinomio $ax^2 + bx + c$ Adam e Boris fanno un gioco iniziando a turno da Adam che può sostituire un coefficiente con la somma degli altri due, mentre Boris può sostituire un coefficiente con il prodotto degli altri due. Vince chi ottiene per primo un polinomio a radici reali distinte. Mostrare che $c \neq a$ Adam ha una strategia vincente. Se invece $a = b = c = 2$ il gioco non termina mai.*

***Soluzione:*** Se $a \neq b$ Adam gioca $b \to (a + c)$ ottenendo $\Delta = (a - c)^2 > 0$ e vince in una mossa.
$2x^2 + 2x + 2$ non ha radici reali, allora Se Adam giocasse $a \to (b + c)$, Boris risponde con $b \to ca$ ottenedo $4x^2 + 8x^2 + 2$ vincendo. Allora Adam inizia giocando $b \to (a + c)$ lasciando $2x^2 + 4x + 2$.
Se Boris giocasse $a \to bc$ Adam giocherebbe $b \to (a+c)$ ottenendo $8x^2+10x+2$ da cui vince, dunque Boris gioca $b \to ac$ che lascia invariato il polinomio.
Se Adam giocasse $a \to (b+c)$ Boris risponde con $b \to ac$ ottenendo $4x^2+8x+2$ da cui vince, dunque Adam gioca $b \to (a+b)$ che lascia invariato il polinomio.

**Problema 8** *Consideriamo una serie di numeri disposti in linea. Inventiamoci un' operazione che agisce su quattro numeri consecutivi, per cui a,b,c e d vengono risistemati secondo l' ordine d,c,b,a. E' possibile trasformare la serie $1, 2, 3, ..., 18, 19, 20$ nella serie $20, 13, 1, 2, 3, ..., 12, 14, 15, ..., 19$?*

***Soluzione:*** Definiamo "inversione" una coppia di numeri consecutivi in cui il numero più grande precede quello più piccolo. Quindi la serie iniziale ha zero inversioni, mentre quella finale ne ha 31. Notare che se un gruppo di quattro numeri consecutivi ha $x$ inversioni, dopo una trasformazione ne avrà $6 - x$. Quindi la parità del numero di inversioni è invariante. Allora non è possibile raggiungere quella configurazione finale.

**Problema 9** *Delle pietre sono posizionate all'interno di una sequenza infinita di secchi. Fino a quando ci sono almeno due pietre in un singolo secchio, è possibile rimuoverle entrambe da quest'ultimo e posizionarne una nel secchio precedente e l'altra nel successivo. E' possibile tornare alla configurazione di partenza dopo un numero finito di mosse?*

***Soluzione:*** Etichettiamo la sequenza con numeri interi consecutivi e chiamiamo $N_i$ il secchio contenente l' $i$-esima pietra. Consideriamo la quantità $X = \sum_i N_i^2$ e vediamo cosa le succede dopo ogni mossa. Prima diminuisce di $2t^2$ perchè vengono rimosse le due pietre dal secchio $t$, successivamente aumenta di $(t-1)^2 + (t+1)^2 = 2t^2 + 2$ appena le due pietre vengono riposizionate nei secchi adiacenti. Quindi ogni mossa fa aumentare $X$ di due unità; allora $X$ non tornerà mai al valore di partenza e la configurazione iniziale non potrà mai essere raggiunta nuovamente.

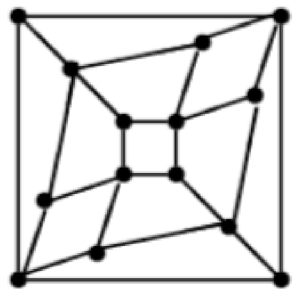
**Problema 10** *Dato un trinomio $ax^2 + bx + c$ è possibile eseguire le seguenti trasformazioni:*

1. *scambiare i coefficienti $a$ e $c$*
2. *effettuare la sostituzione $x \to x + t$ dove $t$ è un qualsiasi numero reale*

*Partendo dal trinomio $x^2 + 2x - 1$ è possibile ottenere con una sequenza di queste mosse il trinomio $x^2 - x - 2$?*

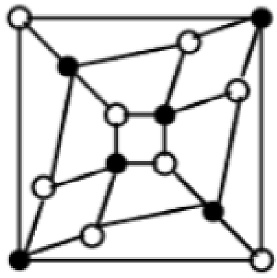
***Soluzione:*** Osserviamo come varia con le trasformazioni descritte una quantità caratteristica dei polinomi di secondo grado: il discriminante.
Banalmente, scambiando i coefficienti $a$ e $c$ il delta rimane invariato.
Analogamente, effettuando la sostituzione $x \to x + t$ ottengo il polinomio $ax^2 + (b + 2at)x + (c + at^2 + bt)$ il cui delta vale $\Delta = b^2 + 4abt + 4a^2t^2 + 4ac - 4a^2t^2 - 4abt = b^2 - 4ac$ , dunque anche in questo caso il delta non cambia.
Dal momento che il delta è un invariante e che nel polinomio iniziale vale 8 è impossibile ottenere il polinomio richiesto, il cui delta è uguale a 9.

**Problema 11** *La figura mostra una mappa stradale che collega 14 città.*



*Esiste un tragitto che passa per ogni città esattamente una volta?*

***Soluzione:*** Coloriamo le città di nero e bianco in modo che città vicine abbiano colori diversi, come mostrato in figura. Ogni tragitto tra le 14 città ha la sequenza di coloti del tipo $NB \ldots NB$ oppure $BN \ldots BN$, quindi passa per 7 città nere e 7 bianche. La mappa, però, ha sei città nere e otto bianche, quindi il percorso richiesto non esiste.



**Problema 12** *Data una scacchiera $n \times n$ dove in ogni casella è stata inizialmente posta una moneta, Adinolfo e Biagio fanno il seguente gioco: A turno un giocatore prende tutte le monete di una colonna o riga contenente almeno una moneta. Inizia Adinolfo e perde il primo giocatore che non può fare alcuna mossa.*

1. *Mostrare che almeno un giocatore ha una strategia vincente*
2. *Per quali $n$ Adinolfo vince?*

***Soluzione:*** Per il primo punto è sufficiente mostrare che il gioco finisce in un tempo finito. Basta osservare che la stessa riga o colonna non può essere scelta più di una volta, e che queste sono in numero finito. Inoltre una volta scelte tutte le righe o colonne il gioco finisce, per cui in al più $2n+1$ turni si ha un vincitore.
Andinolfo vince solo per $n = 1$. Ovviamente se la scacchiera è $n \times n$ Adinolfo vince in una mossa. Mostriamo allora che Biagio ha una strategia vincente altrimenti:

Caso 1. Se $n$ è pari allora Biagio gioca la colonna o riga simmetrica rispetto al centro della colonna o riga giocata da Adinolfo. Questa mossa è sempre legale poichè se Biagio è coerente, Adinolfo muove sempre su una configurazione in cui le monete sono disposte simmetricamente rispetto al centro. Dal momento che la risposta di Biagio è sempre una colonna diversa dall'ultima giocata da Adinolfo, se per assurdo fosse vuota sarebbe stata vuota anche la colonna o riga scelta da Adinolfo, che è un'assurdo. Dunque Biagio ha una strategia non perdente che in un gioco finito è vincente.

Caso 2. Se $n$ è dispari con $n \geq 3$ allora Biagio gioca una colonna se Adinolfo gioca una riga o viceversa una riga se Adinolfo gioca una colonna. le monete restanti costituiscono un gioco equivalente al caso pari, per cui Biagio ha una strategia vincente.

***Soluzione 2:*** Adinolfo vince solo per $n = 1$.
Se infatti $n \geq 2$ osserviamo che il gioco finisce se e solo se sono state scelte tutte le righe *oppure* tutte le colonne. In particolare se il gioco non è finito ci sono sempre almeno una riga e una colonna giocabili. Di seguito distinguiamo le mosse in due categorie: scegliere una colonna, oppure scelgiere una riga

Caso 1. Se $n$ è pari, allora Biagio fa lo stesso tipo di mossa di Adinolfo. Questo è sempre possibile poichè se Biagio è coerente, Adinolfo gioca sempre con un numero pari di righe e colonne giocabili, dunque non può in una mossa rendere zero il numero di mosse disponibili di una delle due categorie. Questa è una strategia non perdente che in gioco finito è perdente.

Caso 2. Se $n$ è dispari allora Biagio gioca una mossa opposta a quella di Adinolfo. Allora le colonne e le righe giocabili saranno entrambe pari riportandoci alla strategia vincente del Caso 1.

**Problema 13** *Consideriamo una griglia rettangolare in cui ogni cella è occupata da un numero reale. Ad ogni passo è possibile cambiare il segno dei numeri di un' intera riga o colonna. E' possibile ottenere una configurazione per cui le somme dei numeri di ogni riga e colonna sono non negative?*

***Soluzione:***
Chiamiamo $S$ la somma algebrica di tutti i numeri della griglia. Tra tutte le possibili configurazioni, scegliamo quella per cui $S$ è massimo. Supponiamo che c'è una colonna di quella configurazione per cui la somma dei suoi numeri è negativa. Allora cambiamo il segno di tutti i numeri della colonna, facendo aumentare così $S$. Ma in questo modo otteniamo un assurdo, perchè era stato scelto $S$ in modo che il suo valore fosse massimo. Allo stesso modo si dimostra per le righe.

**Problema 14** *Dato un numero intero $n \geq 1$ Agesilao e Brunilde a turno scelgono un primo $p \leq n$ oppure il numero 1 e scrivono la differenza $n - p$. Inizia Agesilao e vince chi riesce a scrivere per primo 0. Per quali $n$ Brunilde ha una strategia vincente?*

***Soluzione:*** Brunilde vince quando $n = 4$ oppure per $k >= 2$ per $n = 4k+2$. Detto $P$ l'insieme di tali numeri, e $V$ il suo complementare in $\mathbb{N}$ allora

1. se $n = 4$ ogni mossa porta in $V$ e mai in 0. Altrimenti, poichè $4k + 2$ è pari, allora la differenza tra due numeri $(4k_1+2)-(4k_2+2) = 4(k_1-k_2)$ è un numero pari maggiore di due, da cui da un numero di $P$ non è mai possibile raggiungerne un'altro di $P$
2. Se $n \in V$ ed $n \geq 11$ allora il più grande elemento di $P$ minore di $n$ è raggiungibile sottraendo 1,2 o 3. Rimangono da studiare i casi (finiti) per $n \leq 10$, per i quali si trova sempre una mossa che porti in $P$

**Problema 15** *Ad una serata di gala alla SSC, svolta intorno ad una tavola rotonda di n posti, prendono parte due gruppi: gli Scientifici e i Letterati. Per garantire la contaminazione dei saperi, viene però imposto che due persone dello stesso gruppo non possano mai sedersi vicine. A turno allora, partendo dai Letterati, ogni gruppo fa sedere un membro. Il primo gruppo che non può far sedere nessuno (a causa delle regole o per l'esaurimento dei posti) si dirà perdente.*
*Per quali n vincono i Letterati?*

***Soluzione:*** I Letterati vincono solo per $n = 1$.
Infatti in quel caso vincono esaurendo tutti i posti in una mossa, altrimenti mostriamo che gli Scientifici hanno sempre una strategia non perdente (e quindi vincente dal momento che il gioco è finito).

Caso 1. Se $n$ è un numero pari gli Scientifici vicono mettendo sempre una persona alla destra dell'ultimo Letterato ad essersi seduto. Ciò è sempre possibile poichè supponendo per assurdo che un Letterato possa sedersi ad un certo punto avendo la destra occupata, alla sua destra deve sedere necessariamente uno scientifico. Vista però la strategia degli Scientifici il posto occupato dal letterato in questo turno era già occupato da un altro letterato. Assurdo.

Caso 2. Se $n$ è dispari (ed $n \geq 3$) allora al primo turno gli scientifici occupano la sedia due posti più a destra rispetto alla sedia occupata dal primo letterato. Il posto in mezzo non può più essere occupato e si ottiene un gioco equivalente al caso $n$ pari. Segue che gli scientifici hanno una strategia vincente.

***Soluzione 2:*** in accordo con quanto detto nella soluzione precedente, il caso pari può essere risolto ponendo lo Scientifico $t$ posti più a destra dell'ultimo Letterato. In particolare se $t = \frac{n}{2}$ la strategia consiste nel mettere lo scientifico di fronte all'ultimo letterato (dunque sfruttando le simmetrie!) Questa idea tuttavia non può essere facilmente sfruttata per il caso dispari.

**Problema 16** *Data una scacchiera composta da* $2017 \times 2017$ *caselle, Antonio e Biagio fanno il seguente gioco: a turno Antonio può scegliere un quadrato di lato 2 tutto contenuto nella scacchiera e rimuovere tali caselle mentre Biagio può scegliere una sola casella qualsiasi e rimuoverla. Quando Antonio non può più muovere, Biagio prende tutte le caselle rimaste. Vince chi alla fine ha preso più caselle.*
*Mostrare che Biagio ha una strategia vincente a prescindere da chi sia il primo giocatore*

***Soluzione:***

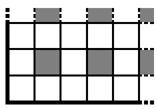


Figura 1: Colorazione della scacchiera

Coloriamo la scacchiera come in figura ed osserviamo che ogni volta che Antonio muove, rimuove esattamente una ed una sola casella nera. In particolare, se tutte le caselle nere sono state rimosse Antonio non può muovere. La strategia di Biagio consiste allora nel catturare ad ogni turno una casella nera.
Osserviamo infatti che, posto $2017 = 4k+1$ con $k = 1008$ le caselle nere sono $4k^2$ da cui, quando il gioco termina biagio ne cattura (indipendentemente da chi inizi) $2k^2$ mentre Antonio ne avrà prese $8k^2$.
Le caselle totali sono $(4k+1)^2 = 16k^2+8k+1$ da cui quelle che Biagio cattura con la sua mossa finale ammontano a $16k^2 + 8k + 1 - 10k^2 = 6k^2 + 8k + 1$, da cui in totale, dette $C_A$ e $C_B$ le rispettive caselle di Antonio e di Biagio

$$C_A = 8k^2 \qquad C_B = 8k^2 + 8k + 1$$

Da cui la vittoria di Biagio

**Problema 17** *Ci sono* 65 *formiche su una scacchiera* $9 \times 9$. *Ad ogni mossa, ogni formica si muove su una casella adiacente. Sono consentiti solamente movimenti in orizzontale e in verticale e non si possono fare due movimenti orizzontali o verticali di fila. Inizialmente le formiche sono poste su caselle distinte. Dimostrare che, dopo un numero finito di mosse, due formiche finiranno sulla stessa casella. Dimostrare anche che ciò non è necessariamente vero per* 64 *formiche.*

***Soluzione:*** Assumiamo che le formiche non si incontrano mai. Assegnamo ad ogni casella la coppia $(x, y)$, dove $x$ e $y$ stanno per il numero di riga e colonna a cui la casella appartiene.
Consideriamo l'insieme delle caselle con entrambe le coordinate pari. Osserviamo che, se ad un istante una formica si trova su una di esse, dopo quattro mosse si ritroverà nuovamente su una casella dello stesso gruppo. Allo stesso tempo, in quattro mosse una formica passerà su una casella di ogni gruppo. Dunque è possibile assegnare ad ogni formica un intero $C$ in modo che la formica si trova su una casella con entrambe le coordinate pari solamente al tempo $t = C(mod\ 4)$. Siccome ci sono 4 interi e 16 caselle con queste caratteristiche, allora ci possono essere al massimo 64 formiche, il che è assurdo.
Per la seconda parte basta mostrare una sequenza periodica di mosse che rispetti le condizioni (ad esempio fare occupare alle formiche un blocco $8 \times 8$ e farle girare periodicamente).

**Problema 18** *Dato un numero* $n \geq 2$ *su una lavagna, Aldo e Giacomo ad ogni turno possono sottrargli 1 o dividere per 2 se il numero è pari. Inizia Aldo e vince chi per primo scrive 1. Allora*

1. *Se $n$ è pari Aldo ha una strategia vincente*
2. *qual'è l'intero $n$ più grande tale che Aldo vince con 2017 mosse?*

***Soluzione:*** Se $n$ è pari Aldo sottrae sempre 1. Infatti Giacomo, ottenendo così sempre un numero dispari potrà solo sottrarre 1, lasciando ad Aldo un numero pari. Allora in $n - 2$ mosse Aldo riceve il numero 2, da cui vince.
Osserviamo che se $n = 2^{2018} - 2$ allora Aldo alla prima mossa divide per 2, lasciando $2^{2017} - 1$ a Giovanni che non potrà che sottrarre 1. Alla $k$-esima mossa allora, per induzione, supponiamo che Aldo abbia $2^{2018-(k-1)} - 2$, allora dividendo ottiene $2^{2018-k} - 1$ che è dispari se $k \leq 2$, altrimenti è 1 e vince. Se

non vince Giacomo può solo sottrarre 1, il che prova per induzione che Aldo vince in 2017 mosse.
Per mostrare che questo è anche il massimo, studiamo il gioco al contrario, imponendo che Giacomo aggiunga sempre uno. Allora è immediato osservare che il numero $n$ maggiore si ottiene in corrispondenza della strategia che consente ad Aldo di moltiplicare sempre per 2, ovvero

$$2\Big(\dots\big(2(2+1)+1\big)\dots+1\Big) = 2^{2018} - 2$$

**Problema 19** *Su un tavolo è dato un mucchio di $n \geq 2$ monetine ed un cesto vuoto. Adriele e Daniele fanno il seguente gioco: a turni un giocatore può*

- *Se il mucchio ha almeno due monete: prendere due monete dal mucchio e metterle nel cestino*
- *Se il cestino ha almeno una moneta: prendere una moneta dal cestino e metterla nel mucchio*

*Vince il primo giocatore che rimuove l'ultima momenta dal mucchio.*
*Mostrare che se il mucchio ha più di 5 monete, entrambi i giocatori hanno una strategia non perdente. (e quindi il gioco è infinito!)*

***Soluzione:*** È immediato osservare che se $n \leq 5$ allora cè un giocatore vincente. Di seguito indichiamo con $(h, k)$ la configurazione con $h$ moente nel mucchio, e $k$ nel cesto.

- Supponiamo che Adriele abbia una strategia vincente.
  Come prima mossa Adriele *deve* giocare $(n, 0) \to (n-2, 2)$, a cui Daniele può rispondere con $(n-2, 2) \to (n-1, 1)$. Se Adriele giocasse $(n-1, 1) \to (n, 0)$ porterebbe Daniele ad una posizione vicente, per cui *deve* giocare $(n-1, 1) \to (n-3, 3)$ a cui Daniele risponde con $(n-3, 3) \to (n-2, 2)$ che è una posizione perdente. Assurdo.

- Supponiamo che Daniele abbia una strategia vincente.
  Adriele allora muove (forzato) da $(n, 0) \to (n-2, 2)$. Se Daniele giocasse $(n-2, 2) \to (n-1, 1)$ Adriele risponderebbe $(n-1, 1) \to (n, 0)$ e poi giocando la strategia vincente di Daniele. Assurdo.
  Allora Daniele gioca $(n-2, 2) \to (n-4, 4)$. A questo punto Adriele può giocare $(n-4, 4) \to (n-3, 3)$. Se a questo punto Daniele giocasse

$(n-3,3) \to (n-2,2)$ Adriele potrebbe giocare da li la strategia vincente di Daniele. Assurdo.
Quindi Daniele gioca $(n-3,3) \to (n-5,5)$, al cui Adriele gioca $(n-5,5) \to (n-4,4)$ portando Daniele su una posizione perdente. Assurdo

**Problema 20** *(IMO shortlist 2015) Dato un intero $n \geq 2$ due giocatori a turno possono scegliere un certo $k \leq n$ tale che*

- *$k$ non sia ancora stato scelto da nessuno*
- *$k$ non sia il precedente o il successivo di un'altro numero scelto il precedenza dal giocatore di turno*

*Il gioco finisce in pareggio se tutti i numeri sono stati scelti, altrimenti chi non può muovere perde.*
*Determinare l'esito del gioco al variare di $n$*

***Soluzione:*** Il gioco finisce in pareggio per $n \in \{2, 4, 6\}$ (è sufficiente fare i vari casi, non banale solo per $n = 6$) mentre altrimenti il secondo giocatore vince.
In generale $B$ sceglie alla sua prima mossa il primo o l'ultimo numero. Al $k$-esimo turno poi se $A$ riesce a muovere, ordiniamo i numeri da lui scelti: Esistono almeno $k-1$ numeri strettamente compresi tra due numeri successivi scelti da A. Poichè $B$ può averne scelti al più $2k-1$ allora $B$ può sempre muovere, da cui $B$ certamente non perde.
Se $n$ è dispari l'unico modo in cui $A$ può pareggiare è prendere tutti i dispari, ma ciò è impossibile poicè $B$ ne prende uno al suo primo turno.
Se $n$ è pari si osserva che se al primo turno $B$ sceglie un pari ed $A$ un dispari, per $n \geq 8$, $B$ può sempre scegliere un dispari al secondo turno, da cui $A$ non riesce a pareggiare.

**Problema 21** *Nella sequenza $1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5...$, ogni termine, a partire dal settimo, è pari all' ultima cifra della somma de precedenti sei termini. Dimostra che questa sequenza non contiene la sottosequenza ordinata $0, 1, 0, 1, 0, 1$.*

***Soluzione:*** Indichiamo con $n_i$ l'i-esimo termine della squenza e definiamo la quantità

$$X_i = n_i + 2n_{i+1} + 3n_{i+2} + 4n_{i+3} + 5n_{i+4} + 6n_{i+5}.$$

Osserviamo che $X_1 = 9$. Inoltre, per ogni $i \geq 2$ si ha:

$$X_i = n_i + 2n_{i+1} + 3n_{i+2} + 4n_{i+3} + 5n_{i+4} + 6n_{i+5} \equiv$$

$$\equiv n_i + 2n_{i+1} + 3n_{i+2} + 4n_{i+3} + 5n_{i+4} + 6(n_{i-1} + n_i + n_{i+1} + n_{i+2} + n_{i+3} + n_{i+4}) \pmod 5$$

$$\equiv n_{i-1} + 2n_i + 3n_{i+1} + 4n_{i+2} + 5n_{i+3} + 6n_{i+4} \pmod 5$$

$$\equiv X_{i-1} \pmod 5.$$

Segue che $X_i \equiv X_1 \equiv 4 \pmod 5$ per ogni i. Ma se avessimo una sottosequenza $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ si avrebbe in corrispondenza $X_i = 12 \equiv 2 \pmod 5$, il che prova la tesi.

**Problema 22** *(2014 USA JMO) Dato un intero positivo $k$ e una griglia infinita esagonale regolare, Arf e Bill fanno il seguente gioco: a turno Arf sceglie due esagoni consecuitivi e pone su di essi un segnalino, dunque Bill ne rimuove uno tra quelli presenti nella griglia. Arf vince se ad un certo punto ottiene $k$ segnalini posti su $k$ caselle distinte, consecutive e allineate. Mostrare che Arf vince per $k < 6$.*

***<u>Soluzione</u>:***

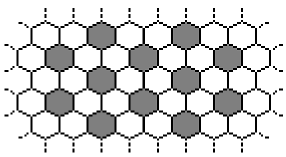


Figura 2: Colorazione della scacchiera

Se $k \geq 6$ coloriamo osservando che ad ogni turno Arf può prendere un solo esagono colorato. Dunque Bill risponde prendendo l'eventuale esagono contenuto nella porzione colorata (o un qualsiasi altro esagono altrimenti). Anche supponendo che Arf possieda tutte le altre caselle, poichè non può occupare due caselle colorate in una mossa, al più può ottenere sequenze di cinque elementi.
Se $k = 5$ allora è sufficiente mostrare che Arf riesce a fare una fila di 5 elementi. Ciò avviene se Arf riesce a costruire due file da tre disgiunte e parallele, fatto che si verifica semplicemente.