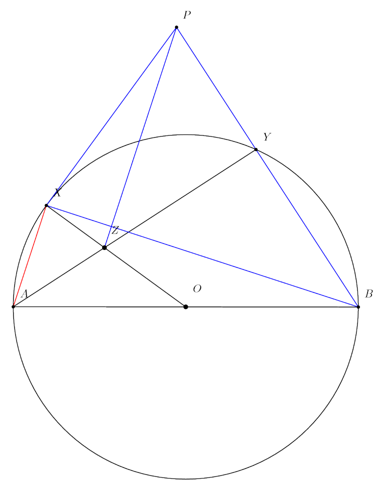
Lezione 4 - Geometria

Problema 1 *(Dalle Olimpiadi Di Matematica delle Fiandre 2007)*
Sia data una semicirconferenza con centro O e diametro AB. Sia Z un generico punto all'interno della semicirconferenza, e sia X lintersezione tra OZ e la semicirconferenza, e Y l' intersezione tra AZ e la semicirconferenza. Se P è l'intersezione tra BY con la tangente in X alla semiciconferenza, mostrare che $PZ \perp BX$

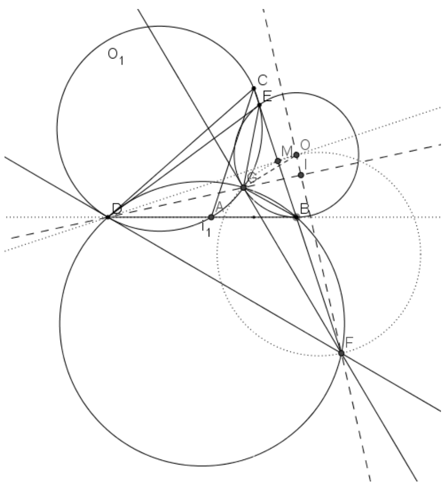
Soluzione:



Si osserva che il quadrilatero $PXZY$ è ciclico e si tracci la circonfrenza contenente la semicirconferenza iniziale. Si ha quindi che $X\widehat{P}Z \cong X\widehat{Y}A$ perchè angoli alla circonferenza insistenti sullo stesso arco della circonferenza circoscritta a $PXZY$, $X\widehat{Y}A \cong X\widehat{B}A$ per analoga ragione ma sulla circonferenza di partenza, inoltre $X\widehat{B}A \cong O\widehat{X}B$ perchè angoli alla base del triangolo isoscele OXB. Da ciò segue che $X\widehat{P}Z \cong O\widehat{X}B$ e poichè $P\widehat{X}Z$ è retto (PX tangente alla semicirconferenza in P) e $X\widehat{P}Z$ è complementare a $X\widehat{Z}P$, lo stesso vale per $O\widehat{X}B$ da cui $PZ \perp BX$.

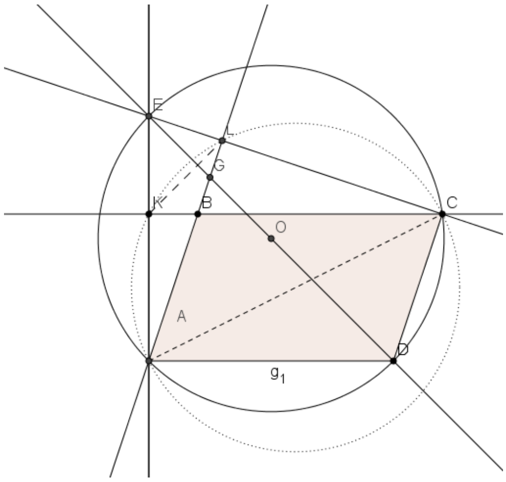
Problema 2 *(Dalle Olimpiadi di Matematica di Corea 2014)*
Sia ABC un triangolo isoscele con $AC \cong BC$. Sia D un punto sulla retta BA tale che A giaccia tra B, D. Sia O_1 la circonferenza circoscritta al triangolo DAC. O_1 incontra BC nel punto E. Sia F un punto di BC tale che FD sia tangente a O_1, e sia O_2 la circonferenza circoscritta a DBF. Le due circonferenze O_1, O_2 si incontrano in $G(\neq D)$. Sia O il circocentro del triangolo BEG. Provare che la retta FG è tangente a O se e solo se $DG \perp FO$.

<u>Soluzione</u>:



Si ha che $DBE \sim CAB$ perchè l'angolo in B è in comune e $D\widehat{C}B \cong D\widehat{E}B$ in quanto angolo alla circonferenza da cui segue $DE \cong DB$,dalla congruenza di BDO eBEO e da proprietà dei triangoli isosceli segue che DO è asse BE e BE in M. Da osservazioni su angoli alla circonferenza insistenti sullo stesos arco e angoli supplementari segue che $E\widehat{B}G \cong G\widehat{D}F \cong D\widehat{E}G$, per cui DE è tangente alla circonferenza in O per inverso teorema angoli alla circonferenza $\Rightarrow OG^2 = OE^2 = OM * OD$ (teorema di Euclide) $\Rightarrow OMG \sim OGD \Rightarrow O\widehat{G}M \cong O\widehat{D}G$ Poichè $O\widehat{M}F$ è retto, si ha pertanto che FG è tangente alla circonferenza di centro $O \Leftrightarrow O\widehat{G}F \cong 90 \Leftrightarrow O, M, G, F$ sono ciclici $\Leftrightarrow O\widehat{F}M \cong M\widehat{G}O \cong O\widehat{D}G$ (angoli alla circonferenza e per quanto dimostrato prima)$\Leftrightarrow DG \perp OF$ (basta considerare i triangoli DOI e FOM).

Problema 3
In un trapezio $ABCD$ con una base AD, il punto L è la proiezione ortogonale di C su AB, e K è il punto su BC tale che AK è perpendicolare è AD. Sia O il circocentro del triangolo ACD. Supponiamo che le rette AK, CL e DO si intersecano nello stesso punto E. Provare che $ABCD$ è un parallelogramma.



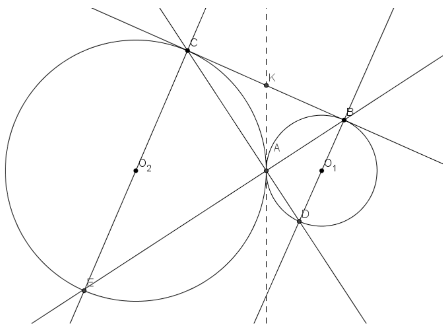
<u>Soluzione</u>:

Osservando che $A\widehat{K}C \cong A\widehat{L}C$ si deduce che A, K, L, C sono ciclici. Da questo segue che $K\widehat{L}A \cong K\widehat{C}A$ e $K\widehat{A}L \cong L\widehat{C}K$ perchè angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Essendo $ABCD$ trapezio con una base AD si ha che $AD \parallel BC$ da cui segue che $K\widehat{C}A \cong C\widehat{A}D$ e quindi $K\widehat{L}A \cong C\widehat{A}D$.Indicando con F l'intersezione tra AL e EC, considerando il triangolo FEL E notando che l'angolo in L è retto si deduce che $D\widehat{E}C \cong C\widehat{A}D$ da cui A, E, C, D ciclici. Da questo segue che $E\widehat{A}C \cong E\widehat{C}D$ (l'angolo in A è retto e per proprietà dei poligoni inscritti), quindi per differenza con $K\widehat{A}L$ e $L\widehat{C}K$ segue che $B\widehat{A}D \cong B\widehat{C}D$ da cui $ABCD$ parallelogramma.

Problema 4

Due circonferenze sono tangenti esternamente A. Una tangente comune alle due circonferenze interseca una circonferenza in B e l'altra in C ($B \neq C$). I segmenti BD e CE sono diametri delle due circonferenze. Provare che i punti D, A e C sono allineati.

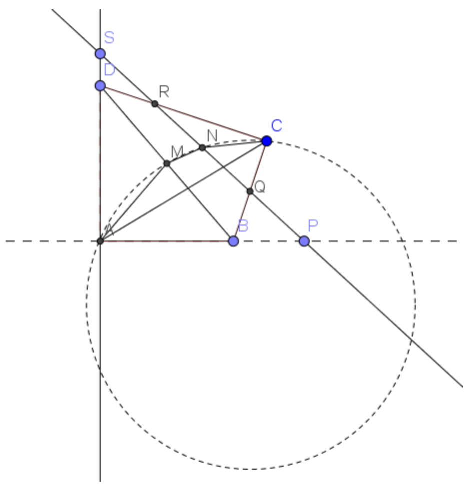
<u>Soluzione</u>:



Si conduca la tangente comune in A che interseca BC in K. Dal teorema delle tangenti segue che $BK \cong AK \cong CK$ quindi ,considerato ABC, si osserva che tale triangolo è rettangolo $AB \perp AC$. Ma $AB \perp AD$ perchè $D\widehat{A}B$ insiste sul diametro BD e da ciò segue che D, A, C sono allineati.

Problema 5 *(Dalle EGMO 2017)*
Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso con $D\widehat{A}B \cong B\widehat{C}D \cong 90°$ e $A\widehat{B}C > C\widehat{D}A$. SIano Q e R due punti rispettivamente sui segmenti BC e CD, tali che la retta QR interseca le rette AB e AD rispettivamente nei punti P e S. Si ha che $PQ \cong RS$.Sia M il punto medio di BD ed N il punto medio di QR.Provare che i punti M, N, A e C stanno su una circonferenza.

<u>Soluzione</u>:

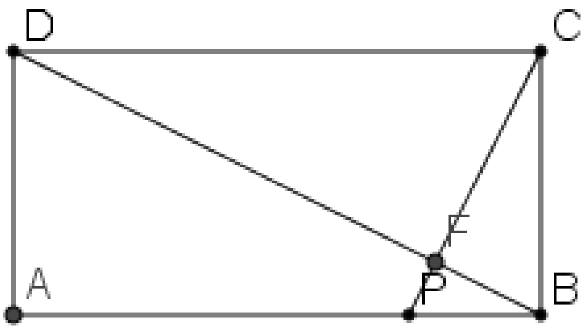


Osservare che $PQ \cong RS$ implica che N è anche il punto medio di PS, inoltre si ha che i triangoli APS e CQR sono retti quindi:

$$A\widehat{N}C \cong A\widehat{N}P + C\widehat{N}Q \cong 2(A\widehat{S}N + C\widehat{R}N) \cong 2(D\widehat{S}R + D\widehat{R}S) \cong 2A\widehat{D}C$$

La seconda uguaglianza segue da proprietà dei triangoli isosceli e teorema angolo esterno. Quest'ultimo teorema giustifica anche l'ultima uguaglianza. Da proprietà dei triangoli rettangoli segue che M è centro del quadrilatero ciclico $ABCD$ da cui $A\widehat{M}C \cong 2A\widehat{D}C$ e quindi, da $A\widehat{M}C \cong A\widehat{N}C$ segue la tesi.

Problema 6 *(dal concorso di ammissione SSC 2017)*
Sia $ABCD$ un rettangolo in cui $BC = \frac{1}{2}AB$. Sia P un punto su AB tale che $BP = \frac{1}{4}AB$. Dimostrare che $BD \perp PC$.

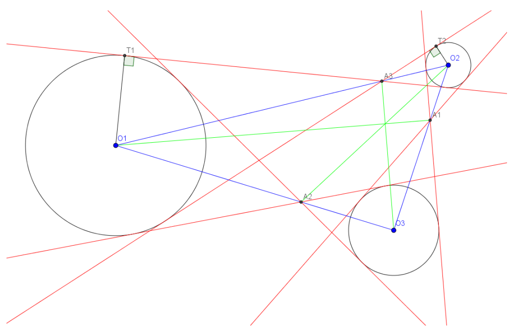


<u>*Soluzione*</u>*:* BAD è rettangolo in A. Sia $F = CP \cap BD$. $AD : AB = PB : CB \Rightarrow BAD \sim CBP$. Dalla similitudine di questi triangoli segue che $D\widehat{B}A \cong P\widehat{C}B$ e $B\widehat{D}A \cong P\widehat{B}C \Rightarrow D\widehat{B}A + B\widehat{D}A = 90°$ da cui $F\widehat{B}P + F\widehat{P}B = 90°$. E quindi $DB \perp CP$.

Problema 7

Siano date nel piano tre circonferenze di centri O_1, O_2, O_3, tali che comunque se ne prendano due, esse risultano esterne. Presa ogni coppia di circonferenze si traccino le due tangenti interne comuni, e sia A_3 il punto da cui sono condotte le tangenti alle circonferenze di centri O_1 ed O_2 (gli altri punti sono denominati in maniera analoga). Dimostrare che O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 passano per uno stesso punto.

<u>*Soluzione*</u>*:*



Si consideri il triangolo $O_1O_2O_3$. I punti A_1, A_2, A_3 stanno sui lati di detto triangolo. Siano T_1 e T_2 i punti in figura. Banalmente si verifica che $O_1T_1A_3 \sim O_2A_3T_2$, da cui si ricva che $\frac{O_1A_3}{O_2A_3} = \frac{R_1}{R_2}$, con R_1 ed R_2 raggi delle

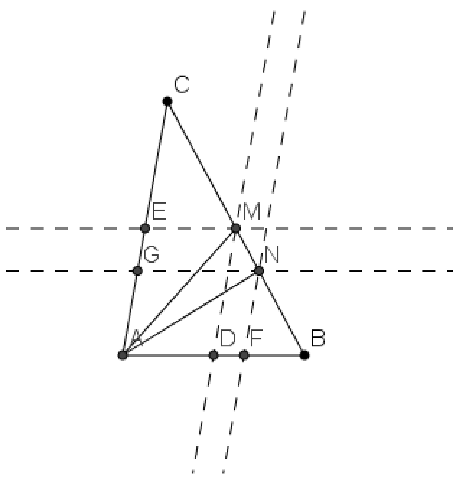
circonferenze rispettivamente di centro O_1 ed O_2.
Ripetendo il ragionamento per ogni lato del triangolo si ottiene:

$$\frac{O_1A_3}{A_3O_2}\cdot\frac{O_2A_1}{A_1O_3}\cdot\frac{O_3A_2}{A_2O_1}=\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{R_2}{R_3}\cdot\frac{R_3}{R_1}=1$$

$\Rightarrow O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3$ concorrono per il teorema di Ceva.

Problema 8 *(dalle gare a squadre del 2015)*
Sia ABC un triangolo in cui $5AB = 8AC$. Siano M ed N due punti su BC tali che M sia il suo punto medio e che $B\widehat{A}N \cong C\widehat{A}M$. Determinare $\frac{NB}{NC}$.

<u>*Soluzione*</u>*:*



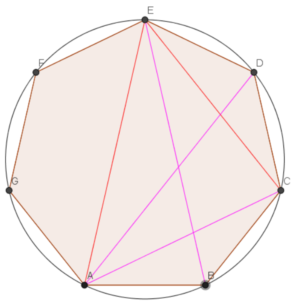
Da M si traccino le parallele ai lati AB ed AC che individuano D su AB ed E su AC. Si faccia lo stesso da N e si trovino F su AB e G su AC. $ADM \sim ANG \Rightarrow AN : AM = AG : AD$, $BDM \sim ABC \Rightarrow BM : DB = BC : AB$ ed usando il fatto che M è il punto medio di BC segue che $BD = AD = \frac{AB}{2}$, da cui $AN : AM = AG : \frac{AB}{2}$. Si ha anche che $ANF \sim AME$ e procedendo in maniera analoga $AN : AM = AF : \frac{AC}{2}$. Combinando queste due relazioni si trova che $\frac{AG}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{5}$.
Si noti che $NGC \sim BFN \sim ABC$ e che $AFNG$ è un parallelogramma. $BF : NB = AG : NC$, cioè $(AB - AF) : NB = AF : NC$ ed anche $GC : NC = FN : NB$ cioè $(AC - AG) : NC = AG : NB$.
Quindi:

$$\frac{NB}{NC}=\frac{AB-AF}{AF}=\frac{AG}{AC-AG}$$

Considerando gli ultimi due membri di questa catena di uguaglianze si ha che $\frac{AG}{AF} = \frac{AB}{AC}$, si trova $AF = \frac{40}{89}AC$ e quindi $\frac{NB}{NC} = \frac{64}{25}$.

Problema 9
Siano A, B, C, D quattro vertici consecutivi di un poligono regolare di n lati in cui vale $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$. Quanto vale n?

<u>*Soluzione*</u>*:*



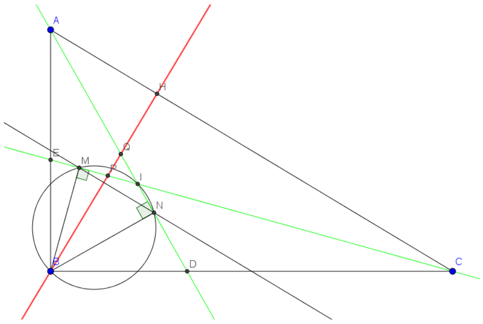
Sicuramente $n > 4$. Infatti se $n = 4$ risulterebbe $AD = AB \Rightarrow \frac{1}{AC} = 0$, il che è assurdo. Di conseguenza esiste almeno un altro vertice E. Indichiamo con d_m una diagonale del poligono regolare tale che a destra o a sinistra abbia esattamente m vertici del poligono (di questi non fanno parte gli estremi di d_m stessa). Fissato m, si dimostra facilmente che tutte le diagonali del tipo d_m sono fra loro congruenti. Essendo ora il poligono regolare, i suoi vertici stanno su una circonferenza, quindi comunque se ne prendano quattro, essi formeranno un quadrilatero ciclico. Applicando Tolomeo ad $ABCE$ si ricava che $AC \cdot BE = AB \cdot EC + AE \cdot BC$. Riscriviamo l'ipotesi come: $AC \cdot AD = AD \cdot AB + AB \cdot AC$. Indicato con l il lato del poligono si ha che $AC = EC = d_1, BE = d_2, AB = BC = l$. Le due relazioni sopra diventano $d_1 d_2 = l d_2 + l d_1, d_1 d_2 = l d_1 + AE \cdot l \Rightarrow AE = d_2$. A destra AE ha tre vertici B, C, D, quindi dovrà averne solo due alla propria sinistra $\Rightarrow n = 7$.

Problema 10
Sia ABC un triangolo rettangolo in B. Sia BH l'altezza relativa al lato AC. Siano AD e CE bisettrici. Siano Q e P i punti di intersezione rispettivamente tra AD e BH e tra BH e CE. Dimostrare che la retta passante per i punti medi di QD e PE è parallela ad AC.

<u>*Soluzione*</u>*:*
Siano $\alpha = B\widehat{A}C$ e $\gamma = A\widehat{C}B$. Si hanno le seguenti relazioni:

$$B\widehat{A}D + A\widehat{D}B + 90° = 180° \;\Rightarrow\; A\widehat{D}B = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

$$H\widehat{B}C + B\widehat{C}H + 90° = 180° \;\Rightarrow\; H\widehat{B}C = 90° - \gamma$$



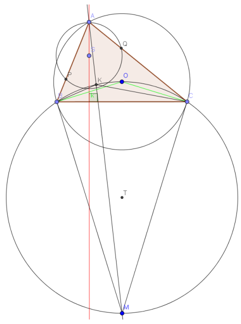
$A\widehat{Q}H \cong B\widehat{Q}D$ (opposti al vertice), $\frac{\alpha}{2} + A\widehat{Q}H + 90° = 180° \Rightarrow A\widehat{Q}H = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Quindi $A\widehat{Q}H \cong B\widehat{Q}D \cong A\widehat{D}B$ e DBQ è isoscele su QD.
Si ha anche che $\alpha + 90° + A\widehat{B}H = 180° \Rightarrow A\widehat{B}H = 90° - \alpha$.
$B\widehat{E}P = \alpha + \frac{\gamma}{2}$ (teorema dell'angolo esterno).
$B\widehat{P}E = 180° - \alpha - \frac{\gamma}{2} - 90° + \alpha = 90° - \frac{\gamma}{2} = \alpha + \gamma - \frac{\gamma}{2} = \alpha + \frac{\gamma}{2}$ (si ricordi che $\alpha + \gamma = 90°$).
Quindi $B\widehat{P}E \cong B\widehat{E}P$ e BEP è isoscele su EP. Siano M il punto medio di EP ed N il punto medio di QD. Dal fatto che BEP e DBQ sono isosceli segue che BM e BN sono altezze, e sono quindi perpendicolari rispettivamente ad EP e QD. Si ha poi che $M\widehat{B}P = 180° - 90° - \alpha - \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$ e che $N\widehat{B}Q = 180° - 90° - 90° + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Sia I l'incentro del triangolo ABC. Il quadrilatero $BMIN$ è ciclico. Essendo BI bisettrice, $D\widehat{B}I = 45°$. Inoltre $M\widehat{B}N = \frac{\alpha+\gamma}{2} = 45°$, $M\widehat{B}P = 90° - \alpha - \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$.
$I\widehat{B}N = 180° - 45° - \frac{\alpha}{2} - 90° = 45° - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$. Dalla ciclicità di $BMIN \Rightarrow N\widehat{M}I \cong I\widehat{B}N$(insistono sullo stesso arco). Inoltre $M\widehat{B}P \cong A\widehat{C}E$ (stessa ampiezza) $\Rightarrow MN /\!/ AC$

Problema 11

Sia ABC un triangolo acutangolo di circocentro O. Sia Γ il cerchio il cui centro sta sull'altezza uscente da A e giace dentro ABC, passante per i punti A, P, Q con P appartenente ad AB e Q appartenente ad AC tali che $BP \cdot CQ = AP \cdot AQ$. Dimostrare che Γ è tangente al centro circoscritto al triangolo BOC.

<u>Soluzione</u>:

Sia ω il circocerchio di BOC. Sia M il punto diametralmente opposto ad O su ω e siano M e K le intersezioni della retta AM con ω. Dal fatto che O è circocentro di ABC segue che $OC = OB \Rightarrow O$ punto medio dell'arco $\widehat{BOC}$ su ω. Dato che M è diametralmente opposto a O, esso biseca l'arco $\widehat{CMB}$ di $\omega \Rightarrow MK$ biseca $B\widehat{K}C$ (che sottende $\widehat{CMB}$). Concludiamo quindi che $B\widehat{K}M \cong C\widehat{K}M$. Sempre usando il fatto che O è circocentro di

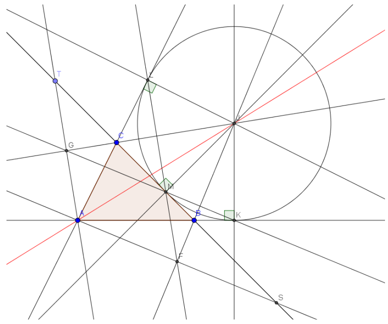


ABC, possiamo affermare che $B\widehat{O}C \cong 2B\widehat{A}C$ (angolo al centro e angolo alla circonferenza). B, K, O stanno su ω e quindi $B\widehat{K}C \cong B\widehat{O}C \cong 2B\widehat{A}C$. KM biseca $B\widehat{K}C$ e quindi $B\widehat{K}M \cong C\widehat{K}M \cong B\widehat{A}C$. A, K, M sono allineati e quindi $A\widehat{K}B = 180° - B\widehat{K}M = 180° - B\widehat{A}C$. Da cui $K\widehat{B}A \cong 180° - A\widehat{K}B - K\widehat{A}B \cong 180° - 180° + B\widehat{A}C - K\widehat{A}B \cong B\widehat{A}C - K\widehat{A}B \cong K\widehat{A}C$. Risulta allora osservando gli angoli che $KBA \sim KAC$. Riscriviamo ora l'ipotesi in modo differente $BP \cdot CQ = AP \cdot AQ \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{AQ}{CQ}$. Possiamo concludere utilizzando il risultato precedente che $KPA \sim KQC$. Quindi $K\widehat{P}A \cong K\widehat{Q}C \cong 180° - K\widehat{Q}A \Rightarrow K \in \Gamma$.
Siano ora S e T i centri rispettivamente di Γ e ω. T è il punto medio di OM, e TM e AS sono entrambi perpendicolari a BC, quindi $TM \,/\!/\, AS$ e $K\widehat{M}T \cong K\widehat{A}S$. Dato che A, K, M sono allineati KTM e KSA sono isosceli, quindi $T\widehat{K}M \cong K\widehat{M}T$ e $K\widehat{S}A \cong S\widehat{K}A$ ed allora $T\widehat{K}M \cong S\widehat{K}A$. Allora S, T, K sono allineati e Γ e ω si intersecano in K che sta su ST, cioè sulla congiungente i centri $\Rightarrow \Gamma$ ed ω sono tangenti in K.

Problema 12 *(Dalle IMO 2012)*
Sia dato un triangolo ABC e sia I il centro dell'excerchio opposto ad A. Sia Γ tale cerchio, tangente a BC in M ed al prolungamento di AB ed AC in K e L rispettivamente. LM eBJ si intersecano in F, KM e CJ si intersecano in G, MF e BC si intersecano in S e AG e BC si intersecano in T. Provar che M è il punto medio di ST.Si ricorda che l'excerchio opposto al vertice A di un triangolo ABC è la circonferenza tangente a BC d ai suoi prolungamenti di AB ed AC).

<u>Soluzione</u>: M, L, K stanno su Γ. Sia P il punto medio di MK. Il segmento BJ sta sull'asse di MK e quindi B, J, F, P sono allineati, ed ovviamente $FP \perp MK$. Considerando i triangoli rettangoli JPG eJQF si ricava che $P\widehat{F}Q \cong Q\widehat{G}P$. Se consideriamo il quadrilatero $ABJC$ si ha che:

$$B\widehat{J}C \cong 2\pi - \pi - C\widehat{A}B - \frac{A\widehat{B}C}{2} - \frac{B\widehat{C}A}{2} \cong \frac{\pi}{2} - \frac{B\widehat{A}C}{2}$$



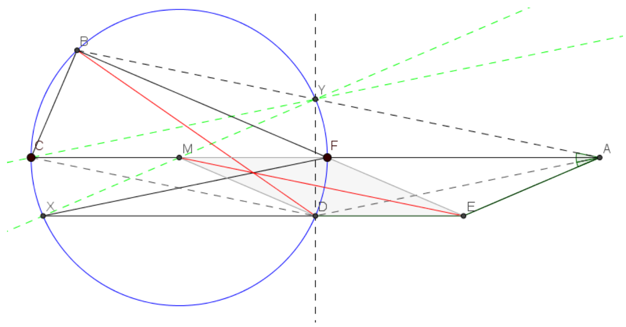
Dal quadrilatero $MJLC$ invece:

$$M\widehat{J}L \cong 2\pi - \pi - B\widehat{A}C - A\widehat{B}C \cong A\widehat{C}B$$

$\Rightarrow L\widehat{J}C \cong M\widehat{J}C \cong \frac{\hat{C}}{2}$ (CL e CM sono tangenti a Γ da un punto esterno) $F\widehat{J}L \cong \frac{B\widehat{C}A}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{B\widehat{A}C}{2}$ e, guardando il triangolo JQL, $M\widehat{L}J \cong \frac{\pi}{2} - \frac{B\widehat{C}A}{2}$. Passando al triangolo LJF: $L\widehat{F}J \cong \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{B\widehat{C}A}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{B\widehat{C}A}{2} + \frac{B\widehat{A}C}{2} \cong \frac{B\widehat{A}C}{2}$. Passiamo ora al quadrilatero $AFJL$. Essendo I excentro e AJ è bisettrice di $B\widehat{A}C \Rightarrow J\widehat{A}L \cong \frac{B\widehat{A}C}{2}$,$L\widehat{F}J \cong J\widehat{A}L$ e quindi si può concludere che $AFJL$ è ciclico. Quindi $J\widehat{L}A \cong \frac{\pi}{2} \Rightarrow A\widehat{F}J \cong \frac{\pi}{2}$, $F\widehat{A}B \cong F\widehat{A}L - B\widehat{A}L \cong \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{B\widehat{A}C}{2} - \frac{A\widehat{C}B}{2} - B\widehat{A}C \cong \frac{A\widehat{B}C}{2}$, inoltre $F\widehat{J}B \cong \pi - B\widehat{A}C - A\widehat{C}B - \frac{A\widehat{B}C}{2}$ (usando il teorema dell'angolo esterno) $\Rightarrow F\widehat{J}B \cong \frac{\hat{B}}{2}$, $F\widehat{A}B \cong F\widehat{J}B \Rightarrow F\widehat{B}J \cong F\widehat{B}A$ (secondo criterio di congruenza) $\Rightarrow AB \cong BJ$, $MJ \cong MB + BJ \cong BK + BJ \cong BK + AB \cong AK$ (usando il fatto che BK e MB sono le tangenti a Γ condotte da B). Analogamente di dimostra che $MT \cong AL$. Inoltre da $AL \cong AK$ (tangenti a Γ da A) segue che $MJ \cong MT$, da cui M punto medio di ST.

Problema 13 *(Dalle IMO 2016)*
Sia dato un triangolo BCF rettangolo in B. Sia A un punto sulla retta passante per CF tale che $FA \cong FB$ e tale che F stia tra C ed A. D è un punto tale che $DA \cong DC$ e che AC sia bisettrice di $D\widehat{A}B$.Sia un punto tale che $EA \cong ED$ e che AD sia bisettrice di $E\widehat{A}C$. Sia M il punto medio di CF ed X il punto tale che $AMXE$ sia un parallelogramma. Dimostrare che BD, FX ed ME concorrono.

Soluzione: Sia ω il cerchio circoscritto a BCF. Proviamo come prima cosa che BA, MX, ω si intersecano in un punto Y. Sia Y l'intersezione di MX e ω. Dato che $AMXE$ è un parallelogramma con un angolo che è il doppio dell'angolo in A del triangolo isoscele BFA e sfruttando l'ipotesi si trova che $Y\widehat{M}F \cong M\widehat{X}D \cong M\widehat{A}E \cong 2B\widehat{A}F \cong B\widehat{F}C$. Sia ora Y' il



punto di intersezione tra ω e BA. Si ha che $Y'\widehat{B}F \cong \frac{B\widehat{F}L}{2}$(per quanto detto prima). Inoltre BCF rettangolo in $B \Rightarrow CF$ diametro $\Rightarrow M$ centro di $\omega \Rightarrow Y\widehat{B}F \cong \frac{Y\widehat{M}F}{2}$(angoli al centro e alla circonferenza) $\Rightarrow Y\widehat{B}F \cong Y'\widehat{B}F$ e possiamo quindi concludere che Y e Y' coincidono. Inoltre $Y\widehat{C}A \cong Y\widehat{B}F$ perchè sottendono l'arco YF, da cui $Y\widehat{C}A \cong Y\widehat{A}C \cong \frac{B\widehat{F}C}{2}$ uando il teorema dell'angolo esterno sul triangolo BFA. DAto che CYA è isoscele su CA e Y sta sull'asse di CA.DAto che $DA \cong DC$, ADC è isoscele su AC da cui D sta sull'asse di AC ed è il simmetrico di Y rispetto ad AC diametro di ω e quindi D sta su ω. CA biseca l'arco $YD \Rightarrow Y\widehat{C}F \cong \frac{Y\widehat{X}D}{2} \cong \frac{Y\widehat{C}D}{2}$ (usando l'ipotesi). Quindi anche X sta su ω. $F\widehat{X}D$ insiste sull'arco FD, quindi $F\widehat{X}D \cong F\widehat{B}A \cong F\widehat{A}D$ e quindi $FAXD$ parallelogramma. Ragionando sugli angoli si trova che anche $MFED$ è un parallelogramma. Quindi $MF \cong DE$ e ME passa per il punto medio di FD. Poichè $BF \cong FA \cong XD$ si ga che $BFDX$ è un trapezio isoscele. Proviamo ora che B, F, E sono allineati: $F\widehat{E}D \cong F\widehat{M}D \cong 2Y\widehat{B}F \cong B\widehat{F}C \Rightarrow B, F, E$ allineati. Da ciò la tesi.