Lezione 2 - Algebra

Problema 1 *Sia dato il polinomio*

$$p(x) = x^3 - 8x - 1$$

e siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *le sue radici. Calcolare* $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3$.

Soluzione: Dalle formule di Viete sappiamo che

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
\sigma_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -8 \\
\sigma_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1.
\end{aligned}$$

Adesso scriviamo

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 &= \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 \\
&+ 3(\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_3^2\lambda_2 + \lambda_3^2\lambda_1) \\
&+ 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3
\end{aligned}$$

aggiungiamo e sottraiamo $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3$ al secondo termine dentro la parentesi

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 &= \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 \\
&+ 3\Big((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - (\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3)\Big) \\
&+ 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3).$$

Sostituiamo adesso i σ_i e poniamo $x = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3$

$$\begin{aligned}
\sigma_1^3 &= x + 3(\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - x) + 6\sigma_3 \\
2x &= 2\sigma_1^3 - 6\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3 \\
\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 &= x = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3.
\end{aligned}$$

Problema 2 *Dimostrare che se la somma di n numeri reali positivi è minore o uguale ad n allora il loro prodotto è minore o uguale ad 1.*

Soluzione: Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numeri reali positivi tali che $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq n$. In base alla disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica otteniamo

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \leq \frac{n}{n} = 1 \Rightarrow x_1 x_2 \ldots x_n \leq 1.$$

Problema 3 *Dimostrare che non esiste una successione a_n strettamente crescente a termini interi e non negativi tale che $a_{nm} = a_n + a_m$ per ogni $n, m > 0$.*

Soluzione: Sappiamo che a_n è strettamente crescente, ne segue che

$$a_m - a_n \geq m - n \quad \forall m, n \in \mathbb{N} : m > n$$

Supposto $m = 2n$, vale per a_n la relazione

$$a_{2n} - a_n = (a_2 + a_n) - a_n = a_2$$

Combinando le due relazioni trovate, otteniamo

$$a_2 = a_{2n} - a_n \geq 2n - n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

che è assurdo.

Problema 4 *Se $f(x, y)$ è un polinomio simmetrico e $(x - y)$ divide $f(x, y)$, allora $(x - y)^2$ divide $f(x, y)$.*

Soluzione: Sapendo che $(x - y)$ divide $f(x, y)$, possiamo scrivere

$$f(x, y) = (x - y)g(x, y)$$

per un qualche polinomio g.
Sappiamo che f è simmetrico, pertanto $f(x, y) = f(y, x)$, da ciò, sostituendo, si deduce che g è antisimmetrico, i.e. $g(x, y) = -g(y, x)$. Dunque

$$g(x, x) = 0 \quad \forall x.$$

Se ne deduce che $(x - y)$ divide g, pertanto esiste un polinomio k tale che $g(x, y) = (x - y)k(x, y)$. Da cui andando a sostituire

$$f(x, y) = (x - y)^2 k(x, y).$$

Ne segue che $(x - y)^2$ divide $f(x, y)$.

Problema 5 *(China Western Mathematical Olympiad 2004)*
Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_1 = a_2 = 1$ e

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n \quad \forall n \geq 1.$$

Trovare a_{2017}.

Soluzione: Per ipotesi abbiamo

$$a_{n+2}a_{n+1} - a_{n+1}a_n = 1.$$

quindi la successione $\{a_{n+1}a_n\}$ è una progressione aritmetica di ragione 1 e il primo termine è uguale a 1. Dunque

$$a_{n+1}a_n = n \quad \forall n \geq 1$$
$$a_{n+2} = \frac{n+1}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{\frac{n}{a_n}} = \frac{n+1}{n}a_n.$$

Da cui infine otteniamo

$$a_{2017} = \frac{2016}{2015}a_{2015} = \frac{2016 \cdot 2014}{2015 \cdot 2013}a_{2013} = \ldots = \frac{2016 \cdot 2014 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{2015 \cdot 2013 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}a_1 = \frac{2016!!}{2015!!}$$

(dove $n!!$ è il prodotto di tutti i numeri pari da 2 fino ad n se n è pari o il prodotto di tutti i numeri dispari da 1 fino ad n se n è dispari).

Problema 6 *Sia a_n la successione che rappresenta, per ogni n, il numero di modi in cui è possibile costruire un rettangolo $2 \times n$ con tessere di domino 2×1. Trovare una relazione di ricorrenza per a_n.*

Soluzione: La soluzione è

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2$$

e può essere giustificata dal fatto che un rettangolo $2 \times n$ possa terminare con un pezzo orizzontale o con due verticali:

- il numero di rettangoli $2 \times n$ che terminano con un pezzo orizzontale è uguale al numero di rettangoli $2 \times (n-1)$
- il numero di rettangoli $2 \times n$ che terminano con due pezzi verticali è uguale al numero di rettangoli $2 \times (n-2)$.

Problema 7 *Il dilemma del corridore. Il famoso corridore Usainetto Bolto si appresta a correre una pista di lunghezza $L > 0$ e deve decidere quale delle seguenti strategia è la migliore, ovvero quella che impiega meno tempo. Siano $v_1, v_2 \dots v_n$ n velocità maggiori di zero e sia v_m la loro media aritmetica. Divisa la pista in n parti uguali $l_1, l_2 \dots l_n$, dimostrare che mantenere per l'intero percorso la velocità v_m è una strategia migliore rispetto ad andare a velocità v_i per il tratto l_i per ogni $1 \leq i \leq n$.*

Soluzione: Dalla definizione di velocità si ha che: $t_1 = \frac{L}{v_m}$ e $t_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{v_i}$.
Bisogna dimostrare che $t_1 \leq t_2$.
Ricordandosi che $l_i = \frac{L}{n}$ e semplificandolo si arriva alla disuguaglianza:

$$\frac{1}{v_m} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i}}{n}$$

Si osserva che i due membri sono rispettivamente l'inverso della media aritmetica e della media armonica di $v_1, v_2 \dots v_n$, quindi per HM-AM la disuguaglianza è dimostrata. Pertanto non esiste combinazione migliore dell'andare a velocità media.

Problema 8 *Siano $x, y, z > 0$. Dimostrare che :*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Soluzione: Dimostriamo la prima disuguaglianza. Possiamo riscrivere il primo membro come: $\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{z})$. Applicando la disuguaglianza AH-AM al primo termine, e analogamente per gli altri, si ottiene

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{2}{x+y}.$$

Da qui la prima disuguaglianza è dimostrata. Per la seconda basta riapplicare AH-AM al secondo e terzo membro divisi per 3.

Problema 9 *Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ numeri reali positivi e sia $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ una permutazione di $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dimostrare che*

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \dots + \frac{x_n}{y_n} \geq n.$$

Soluzione: Osserviamo che $x_1x_2\dots x_n = y_1y_2\dots y_n$. Quindi tramite la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica abbiamo

$$\frac{\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\dots+\frac{x_n}{y_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{x_1x_2\dots x_n}{y_1y_2\dots y_n}} = 1.$$

Problema 10 *Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, provare che*

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

Soluzione:

$$\begin{gathered}(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0\\ 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+ac+bc) \geq 0\\ a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc\\ (a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)\end{gathered}$$

Problema 11 *Trovare un polinomio $Q(x)$ di grado 3 le cui radici sono quelle di*

$$P(x) = x^3+ax^2+bx+c = 0$$

elevate al cubo.

Soluzione: Scriviamo i coefficienti di $Q(x) = x^3+Ax^2+Bx+C$ utilizzando le formule di Viète:

$$A = -(x_1^3+x_2^3+x_3^3) \quad B = x_1^3x_2^3+x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3 \quad C = -(x_1x_2x_3)^3$$

È facile notare che $C = c^3$. A può essere calcolato così:

$$\begin{gathered}-A = (x_1+x_2+x_3)^3 - 3(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1) =\\ = (x_1+x_2+x_3)^3 - 3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) + 3(x_1x_2x_3) =\\ = -a^3+3ab-3c\end{gathered}$$

Simili considerazioni portano al calcolo di $B = b^3-3abc+3c^2$.

Problema 12 *Trovare tutte le soluzioni polinomiali della seguente equazione funzionale:*

$$f(x+y) = f(x)f(y) - xy \quad \forall x, y \in R$$

Soluzione: Innanzitutto si noti banalmente che il polinomio costante (anche con costante nulla), non è una soluzione, infatti il secondo membro dell'equazione sarebbe un polinomio di secondo grado mentre il primo un polinomio di grado zero. Continuando a ragionare sui gradi, sia n il grado di $f(x)$, allora $f(x)f(y)$ ha grado $2n$. Possiamo ora distinguere due casi : $2n > 2$ e $2n = 2$ (abbiamo dimostrato che non possiamo avere grado zero).
Se $2n > 2$ allora il grado di di $f(x)f(y) - xy$ è ancora $2n$ e quindi imponendo che i gradi dei due membri siano uguali otteniamo $n = 2n$, assurdo perchè $n \neq 0$.
Se invece $2n = 2$ ovvero $n = 1$, in tal caso $f(x)f(y) - xy$ deve avere grado 1. Imponiamo quindi che $f(x) = ax + b$ e cerchiamo una soluzione tramite il principio di identità dei polinomi.

$$a(x + y) + b = a^2xy + ab(x + y) + b^2 - xy$$

Dovendo eliminare il termine xy si ottiene che $a = \pm 1$ e sempre con simili considerazioni si trova che $b = 1$. Pertanto le uniche soluzioni polinomiali possibili sono

$$f_1(x)_1 = 1 + x \quad e \quad f_2(x) = 1 - x.$$

Problema 13 *Siano a, b, c le lunghezze dei lati di un triangolo. Dimostrare che*

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$$

Soluzione: Poniamo

$$x = \frac{a + b + -c}{2}, \quad y = \frac{a + c + -b}{2}, \quad z = \frac{b + c + -a}{2},$$

in questo modo si ha

$$a = x + y, \quad b = x + z, \quad c = y + z.$$

La disuguaglianza da dimostrare, dopo qualche conto, diventa

$$x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y) \geq 6xyz$$

dividendo per xyz possiamo riscriverla nel modo seguente

$$\frac{x}{z} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \geq 6.$$

Per AM-GM abbiamo $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{yx}} = 2$, da cui scrivendo le analoghe per x, z e y, z e sommando membro a membro si ottiene proprio la disuguaglianza voluta.

Problema 14 *Sia $P(x)$ un polinomio monico a coefficienti interi. Supponiamo esistano due numero naturali k e p tali che $p+1$ non divida $P(k), P(k+1), \dots P(k+p)$. Dimostrare che $P(x)$ non ha soluzioni razionali.*

Soluzione: Per assurdo supponiamo che $P(x)$ abbia una soluzione razionale, allora in quanto polinomio monico dalla teoria sappiamo che la soluzione è intera. Pertanto $P(x) = (x - m)q(x)$, dove m è un intero e $q(x)$ è un'altro polinomio a coefficienti interi.
Sostituendo a x di volta in volta $k, k+1, \dots, k+p-1$ e $k+p$ otteniamo:

$$\begin{aligned} P(k) &= (k-m)q(k) \\ P(k+1) &= (k+1-m)q(k+1) \\ &\vdots \\ P(k+p) &= (k+p-m)q(k+p). \end{aligned}$$

Poichè $k-m, k+1-m, \dots, k+p-m$ sono $p+1$ interi consecutivi almeno uno di essi è divisibile per $p+1$, quindi almeno uno tra $P(k), P(k+1), \dots, P(k+p)$ è divisibile per $p+1$, contro le ipotesi. Dunque $P(x)$ non ha soluzioni razionali.

Problema 15 *Trovare le soluzioni reali del sistema*

$$x^5 + y^5 = 33, \quad x + y = 3$$

Soluzione: Poniamo $\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy$. Sostituendo, otteniamo

$$\begin{gathered} \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 33, \quad \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2^2 - 9\sigma_2 + 14 = 0 \implies \sigma_2 = 5 \pm 2. \end{gathered}$$

Troviamo a questo punto x ed y a partire da σ_1 e σ_2.
Le soluzioni sono $(2, 1)$ e $(1, 2)$.

Problema 16 *Data la successione a_n così definita*

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = \frac{(a_{n-1}^2 + 2)}{a_{n-2}} \quad n \geq 3,$$

mostrare che tutti i suoi termini a_i sono interi.

Soluzione: Scriviamo la successione come $a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 2$ e, sostituendo $n+1$ a n, otteniamo $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 2$.
Sottraendo membro a membro, otteniamo

$$a_n(a_{n-2} + a_n) = a_{n-1}(a_{n-1} + a_{n+1})$$

Tale espressione è verificata per qualunque $n \geq 3$. Ne segue che

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = c \quad \forall n \geq 3$$

Sostituendo, si trova $c = 4$. Da ciò, $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$.

Problema 17 *Sia $f(x)$ un polinomio monico a coefficienti interi. Si dimostri che, se esistono 4 interi distinti a, b, c, d tali che $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$, non esiste nessun k tale che $f(k) = 8$.*

Soluzione: Sia $g(x) = f(x) - 5$. Possiamo scrivere $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)h(x)$. Se r è un intero tale che $f(r) = 8$ allora

$$g(r) = 3 = (r-a)(r-b)(r-c)(r-d)h(r).$$

Sappiamo che 3 ha al massimo 3 fattori distinti $(1, -1, -3)$, ma risulta essere prodotto di 5 interi non nulli, di cui almeno 4 distinti $(a \neq b \neq c \neq d)$.
Per il principio dei cassetti ciò è assurdo.

Problema 18 *Siano $x, y, z > 0$, Provare la disuguaglianza*

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{1}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$

Soluzione: Dobbiamo dimostrare che

$$\frac{xyz}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{xyz}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{xyz}{z^3 + x^3 + xyz} \leq 1.$$

Per fare ciò basta dimostrare la disuguaglianza

$$\frac{xyz}{x^3 + y^3 + xyz} \leq \frac{z}{x + y + z}.$$

Infatti, se riusciamo a dimostrare ciò, sommando membro a membro le disuguaglianze che otteniamo permutando ciclicamente x, y e z otteniamo la tesi. Adesso scriviamo

$$\frac{xyz}{x^3+y^3+xyz} \leq \frac{z}{x+y+z} \Leftrightarrow xy(x+y)+xyz \leq x^3+y^3+xyz$$
$$\Leftrightarrow xy(x+y) \leq (x+y)(x^2-xy+y^2) \Leftrightarrow 0 \leq x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$$

osserviamo che l'ultima disuguaglianza è sempre verificata.

Problema 19 *Una progressione aritmetica di interi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ è tale che a_2 è multiplo di 2, a_3 è multiplo di 3, a_4 è multiplo di 4 e così via fino ad ad a_{n-1} che è multiplo di $n-1$, ma a_n non è multiplo di n. Quali sono i possibili valori di n per cui esiste una siffatta progressione artimetica?*

Soluzione: Sia r la ragione della progressione. Allora $a_n = a + nr$ per un certo a. Sia $1 < k < n$, $k|a_k = a + kr$ implica che $k|a$ e quindi, chiamando $m(n)$ il minimo comune multiplo dei numeri da 2 a $n-1$, $m(n)|a$.
Se $n = xy$, con x ed y primi fra loro e maggiori di uno allora $x|m(n)$ e $y|m(n)$, da cui $n|m(n)$, quindi $n|a$ e pertanto $n|a+nr = a_n$, contro le ipotesi. Mentre se $n = p^m$ è la potenza di un primo, ponendo $m(n) = a$ e $r = 1$ si ha che per $1 < k < n$, $k|m(n)$ e quindi $k|m(n) + k = a_k$. Inoltre $n \nmid m(n)$ in quanto tra i numeri 2 e $n-1$ la massima potenza di p che compare è p^{m-1}. Allora $n \nmid m(n) + n = a_n$ e d abbiamo così costruito la progressione cercata.

Problema 20 *Siano a, b, c tre interi distinti, sia P un polinomio a coefficienti interi. Mostrare che, con queste ipotesi, le relazioni*

$$P(a) = b \quad P(b) = c \quad P(c) = a$$

non possono essere soddisfatte simultaneamente.

Soluzione: Supponiamo per assurdo che tutte le relazioni siano soddisfatte, otteniamo

$$P(x) - b = (x-a)P_1(x), \tag{1}$$
$$P(x) - c = (x-b)P_2(x), \tag{2}$$
$$P(x) - a = (x-c)P_3(x). \tag{3}$$

Tra a, b e c scegliamo la coppia con la massima differenza in valore assoluto. Supponiamo che sia (a, c). Abbiamo

$$|a - b| < |a - c|. \tag{4}$$

Calcolando (1) in c, otteniamo

$$a - b = (c - a)P_1(c).$$

Sappiamo che $P_1(c)$ sia intero, dunque otteniamo che $|a - b| \geq |c - a|$ e ciò contraddice la (4).

Problema 21 *(Giornalino della Matematica 16)*
Per ogni a, b, c, m, n reali positivi, dimostrare che

$$\frac{a}{mb + nc} + \frac{b}{mc + na} + \frac{c}{ma + nb} \geq \frac{3}{m + n}$$

Soluzione: Poniamo $A = mb + nc, B = mc + na, C = ma + nb$. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz abbiamo

$$\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C}\right)(aA + bB + cC) \geq (a + b + c)^2.$$

Osservando che $aA + bB + cC = (m + n)(ab + ac + bc)$ e che dal Problema 10 abbiamo $3(ab + ac + bc) \leq (a + b + c)^2$, si ha allora

$$\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C}\right)(aA + bB + cC) \geq 3(ab + ac + bc).$$

Dividendo per $(m + n)(ab + ab + bc)$ si ottiene la tesi.

Problema 22 *(Giornalino della Matematica 16)*
Sia a_i $(i \geq 3)$ una successione definita in questo modo:

$$a_3 = \frac{5}{7}$$
$$a_n = \frac{a_{n-1} + n}{na_{n-1} + 1} \quad \text{per ogni } n \geq 4$$

Calcolare a_{2017}.

Soluzione: Definiamo $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, e riscriviamo la ricorrenza così:

$$a_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + n}{n\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + 1} = \frac{p_{n-1} + nq_{n-1}}{np_{n-1} + q_{n-1}}.$$

Cioè

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + nq_{n-1}, \\ q_n &= np_{n-1} + q_{n-1}. \end{aligned}$$

Sommando le due equazioni, si ottiene:

$$\begin{aligned} p_n + q_n &= (n+1)(p_{n-1} + q_{n-1}) \\ p_n - q_n &= -(n-1)(p_{n-1} - q_{n-1}). \end{aligned}$$

Sapendo che $p_3 + q_3 = 12 = \frac{4!}{2}$ e $p_3 - q_3 = -2!$ sviluppando la ricorrenza otteniamo

$$\begin{aligned} p_n + q_n &= \frac{(n+1)!}{2} \\ p_n - q_n &= (-1)^n (n-1)!. \end{aligned}$$

Infine

$$a_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2} + (-1)^n (n-1)!}{\frac{(n+1)!}{2} - (-1)^n (n-1)!} = \frac{(n+1)n + 2(-1)^n}{(n+1)n - 2(-1)^n},$$

quindi in particolare $a_{2017} = \frac{4070304}{4070308} = \frac{1017576}{1017577}$

Problema 23 *Siano α, β, γ tre numeri reali positivi tali che $\alpha + \beta + \gamma = 1$, e siano x, y, z tre numeri reali non negativi. Dimostrare che:*

$$x + y + z \geq x^\alpha y^\beta z^\gamma + x^\beta y^\gamma z^\alpha + x^\gamma y^\alpha z^\beta$$

Soluzione: Se uno fra i termini x, y, z è 0, la disuguaglianza è banalmente verificata, quindi supponiamo da ora che x, y, z siano positivi.
Considerato il primo prodotto, e analogamente per gli altri due, applichiamo la disuguaglianza di Young scegliendo come coefficienti convessi proprio x, y, z. Pertanto:

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma \leq \alpha x^{\frac{\alpha}{\alpha}} + \beta y^{\frac{\beta}{\beta}} + \gamma z^{\frac{\gamma}{\gamma}} = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

Ripetendo il procedimento per gli altri 2 prodotti e sommando otteniamo:

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma + x^\beta y^\gamma z^\alpha + x^\gamma y^\alpha z^\beta \leq (\alpha+\beta+\gamma)(x+y+z) = x+y+z$$

che è la tesi.

Problema 24 *(Giornalino della Matematica 15)*
Siano dati $k > 1$ interi ed n reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tali che

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

Dimostrare che esistono n interi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ non tutti nulli tali che $|a_i| \leq k-1$ per $i = 1, 2, \ldots, n$ e che

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leq \frac{k-1}{k^n-1}\sqrt{n}.$$

(Aiuto: ricordiamo la disuguaglianza triangolare $|\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$)

<u>Soluzione</u>: Osserviamo preliminarmente che la scelta degli x_i positivi o negativi è completamente indifferente ai fini del problema: infatti, ad ogni coppia (a_i, x_i) possiamo associare la coppia $(-a_i, -x_i)$, di modo che entrambe le somme $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ restino invariate. Quindi possiamo considerare gli x_i come reali non negativi. Applicando la disuguaglianza tra media aritmetica e quadratica alla condizione sugli x_i, otteniamo

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Consideriamo ora la somma $\sum_{i=1}^n a_i x_i$, al variar degli a_i non negativi, anche tutti nulli, con gli x_i positivi fissati. Dalla condizione $|a_i| \leq k-1$, e per la disuguaglianza trovata, si ha

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i x_i| \leq (k-1)\sum_{i=1}^{n} x_i \leq (k-1)\sqrt{n}.$$

Ora, queste sono k^n somme non negative, poiché i coefficienti a_i variano tutti tra 0 e $k-1$, tutte minori o uguali a $(k-1)\sqrt{n}$. Se suddividiamo l'intevarlo $[0, (k-1)\sqrt{n}]$ in k^n-1 intervalli, ciascuno di ampiezza $\frac{k-1}{k^n-1}\sqrt{n}$, per il principio dei cassetti esisterà almeno un intervallo in cui trovo due somme distinte, ovvero che differiscano per almeno un coefficiente nelle relative somme. Ora, chiamiamo

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \quad S_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

due somme che appartengano ad uno stesso intevallo. Allora la loro differenza (in valore assoluto) sarà minore o uguale alla lunghezza dell'intervallo stesso, ovvero

$$|S_1 - S_2| = \left| \sum_{i=1}^{n} b_i x_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (b_i - c_i) x_i \right| \leq \frac{k-1}{k^n - 1}\sqrt{n}.$$

Ma $b_i \neq c_i$ per almeno un indice i, e $|b_i - c_i| \leq k-1$, poiché differenza di interi non negativi, entrambi minori o uguali di $k-1$. Rinominando $b_i - c_i = a_i$, per ogni n-upla x_i abbiamo trovato una n-upla di numeri interi in valore assoluto minori o uguali di $k-1$, tali che la somma cercata soddisfi la condizione data.

Problema 25 *Dimostrare che per ogni x, y, z reali positivi*

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \geq 9(xy + xz + yz)$$

<u>Soluzione</u>: Per il principio dei cassetti abbiamo che almeno 2 tra x, y e z sono dalla stessa parte rispetto a 1, cioè ce ne sono sicuramente 2 entrambi minori di 1 o entrambi maggiori o uguali a 1. Supponendo senza perdita di generalità che x e y siano questi due otteniamo che le due terne $(x^2, 1, 1)$ e $(1, 1, y^2)$ sono ordinate in modo opposto e quindi per la disuguaglianza di Chebycheff abbiamo che

$$(x^2 + 1 + 1)(1 + 1 + y^2) \geq 3(x^2 + 1 + y^2).$$

Applicando adesso Cauchy-Schwarz alle terne $(x, 1, y)$ e $(1, z, 1)$ otteniamo

$$(x^2 + 1 + y^2)(1 + z^2 + 1) \geq (x + y + z)^2.$$

Dal Problema 10 sappiamo che $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + xz + yz)$, pertanto otteniamo infine

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \geq 3(x^2+1+y^2)(z^2+2) \geq 3(x+y+z)^2 \geq 9(xy+xz+yz).$$