Lezione 1 - Introduzione e combinatoria

Problema 1 *Siano $A_1, A_2, \ldots, A_6$ i vertici di un esagono con i lati colorati di rosso. Le diagonali possono essere colorate di rosso oppure di verde. Calcola tutte le colorazioni possibili per le diagonali tali che almeno un lato di ogni triangolo avente i vertici $A_iA_jA_k$ sia rosso.*

Soluzione: Solo due triangoli non hanno lati in comune con l'esagono: $A_1A_3A_5$ e $A_2A_4A_6$. Ogni triangolo può essere colorato in 2^3 modi, escludendo il caso nel quale tutti i lati del triangolo sono verdi, la condizione è soddisfatta in $(2^3 - 1)^2 = 49$ modi.
Le restanti 3 diagonali possono essere colorate in entrambi i modi, la soluzione è quindi $2^3 \cdot 49 = 392$.

Problema 2 *In un tavolo circolare sono sedute 8 persone: 5 femmine e 3 maschi. Calcola in quanti modi possono sedersi le 8 persone (a meno di rotazioni del tavolo), sotto la condizione che due maschi non possono stare in due posti adiacenti.*

Soluzione: Solo due configurazioni sono accettabili: FMFFMFFM oppure FFMFMFMF, per un totale di $2 \cdot 3! \cdot 5! = 1440$ configurazioni.

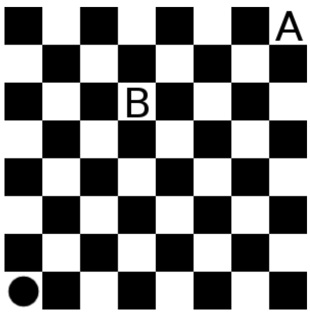
Problema 3 *(Dal Concorso di ammissione alla SSC 2016)*
Otto lavagne del tutto identiche vengono divise fra le scuole Bellini, Mascagni, Puccini e Rossini. Quanti modi ci sono per farlo? (È possibile che a una o più scuole non vengano assegnate lavagne).

Soluzione: Denotiamo ogni lavagna con una stella, e disponiamo le otto lavagne in fila. Ora tracciamo tre barre verticali fra le stelle. Possiamo pensare che le lavagne da sinistra prima della prima barra vadano alla scuola Bellini, quelle frale prima e la seconda barra alla scuola Mascagni, e così via

$$* \mid * \mid * * * \mid * *$$

Quanti modi ci sono di fare questo? Abbiamo $8+3=11$ posti in cui mettere 8 stelle e 3 barre. Basta scegliere dove mettere le barre, e per questo ci sono $\binom{11}{3}=165$ combinazioni possibili.

Problema 4 *(Dalla seconda prova di maturità scientifica 2016)*
Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



Soluzione: Il numero di percorsi possibili per raggiungere la casella A partendo dalla posizione indicata è pari a $\binom{14}{7}$. Il numero di percorsi, tra questi, che passano per la casella B è pari a $\binom{8}{5}\binom{6}{4}$.
Essendo tutti i percorsi equiprobabili, la probabilità dell'evento cercato è

$$p=\frac{\binom{8}{5}\binom{6}{4}}{\binom{14}{7}}.$$

Problema 5 *Sia a_n, la successione di numeri reali così definita:*

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n}. \end{cases}$$

Provare che

(a) $0 < a_n < 3$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$

(b) $a_n < a_{n+1}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$

<u>Soluzione</u>:

(a) Procediamo per induzione su n.
Passo base: $0 < a_0 = 1 < 3$
Passo induttivo: supponiamo che $0 < a_n < 3$. Allora $0 < a_{n+1} = \sqrt{3a_n} < 3$ è vera se e solo se $0 < 3a_n < 9$ è vera; quest'ultima uguaglianza è verificata per l'ipotesi induttiva.

(b) $a_n < a_{n+1}$ se e solo se $a_n < \sqrt{3a_n}$, elevando al quadrato e semplificando (operazione lecita, abbiamo dimostrato che tutti i termini della successione sono positivi) otteniamo $a_n < 3$. Quest'ultima disuguaglianza è stata provata vera nel punto precedente.

Problema 6 *Sia* F_n *la successione di Fibonacci, cioè una successione di numeri interi così definita:*

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}. \end{cases}$$

Provare che $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$.

<u>Soluzione</u>: Procediamo per induzione su n.
Passo base: $F_1F_2 - F_0F_3 = 1 - 0 = (-1)^0$.
Passo induttivo: supponendo che $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$, dimostriamo che $F_{n+2}F_{n+3} - F_{n+1}F_{n+4} = (-1)^{n+1}$. Scriviamo

$$\begin{gathered} F_{n+2}F_{n+3} - F_{n+1}F_{n+4} = (-1)(-1)^n \\ F_{n+2}F_{n+3} - F_{n+1}F_{n+4} + F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = 0 \\ F_{n+3}(F_{n+2} - F_n) - F_{n+1}(F_{n+4} - F_{n+2}) = 0 \\ F_{n+3}F_{n+1} - F_{n+1}F_{n+3} = 0 \\ 0 = 0 \end{gathered}$$

Problema 7 *Considerando una normale scacchiera (con i pezzi degli scacchi nelle loro posizioni iniziali), in quanti modi puoi posizionare le pedine della prima riga con la condizione di dover sempre mettere il re tra le due torri (non necessariamente in caselle adiacenti)?*

Soluzione: Prima scegliamo le tre caselle destinate al re ed alle due torri, ottenendo $\binom{8}{3}$ combinazioni. Le pedine restanti possono venire posizionate in $\frac{5!}{2!2!}$ modi diversi. Il risultato è $\binom{8}{3}\frac{5!}{2!2!}$.

Problema 8 *In quanti modi si possono distrubuire* 12 *monete indistinguibili in 6 borse (distinte) in modo che al più una borsa sia vuota?*

Soluzione: Prima calcoliamo in quanti modi possiamo distribuire le monete senza lasciare borse vuote, a questo risultato parziale aggiungiamo sei volte il numero di modi per distribuire le monete lasciando una borsa vuota. Usando le combinazioni con ripetizione (o il metodo delle barre e delle stelline) otteniamo $\binom{11}{5} + 6\binom{11}{4} = 2442$.

Problema 9 *Vi sono tre scatole. La prima contiene* 12 *penne nere, la seconda contiene* 8 *penne nere e* 2 *rosse, la terza contiene* 20 *penne rosse. Si sceglie a caso una scatola e da questa si estrae una penna.*

(a) Qual è la probabilità che la penna estratta sia rossa?

(b) Si supponga che la penna estratta sia rossa.
Qual è la probabilità che essa sia stata estratta dalla seconda scatola?
Qual è la probabilità che essa sia stata estratta dalla terza scatola?

Soluzione:

(a) Ogni scatola viene scelta con probabilità $\frac{1}{3}$. Si ha una probabilità di 0 estraendo dalla prima scatola, $\frac{1}{5}$ estraendo dalla seconda e probabilità 1 estraendo dalla terza scatola. La soluzione quindi è $0\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = \frac{2}{5}$.

(b) Siano S_2, S_3 ed R gli eventi:

S_2="la penna estratta appartiene alla seconda scatola."
S_3="la penna estratta appartiene alla terza scatola."
R="la penna estratta è rossa."

Per risolvere il problema usiamo il teorema di Bayes

$$P(S_2|R) = \frac{P(S_2 \cap R)}{P(R)} = \frac{1}{6}.$$

Se la penna rossa non proviene dalla seconda scatola, allora deve necessariamente provenire dalla terza scatola, quindi

$$P(S_3|R) = 1 - P(S_2|R) = \frac{5}{6}.$$

Problema 10 *(Finale nazionale gara a squadre 2009.) Il malvagio Tauron, accecato dalla brama di potere, conta i modi in cui può indossare i 7 anelli dei nani sulle 8 dita superstiti delle sue mani. Per ognuno di questi modi, prende nota di quanti e quali anelli vanno su quale dito e in che ordine. Quanti modi diversi conterà?*

Soluzione: Chiamiamo A l'operazione di mettere l'anello ad un dito e B l'operazione di cambiare dito a cui mettere l'anello. Per indossare 7 anelli sulle sue 8 dita Tauron dovrà necessariamente eseguire 7 volte l'operazione A e $(8-1) = 7$ volte l'operazione B e avrà quindi $\binom{14}{7}$ modi di distribuire gli anelli tra le dita. Inoltre, essendo gli anelli diversi tra di loro e quindi distinguibili da Tauron, tali modi andranno moltiplicati per tutte le permutazioni degli anelli ovvero 7!. Tauron conterà quindi $\frac{14!}{7!} = 17297280$ modi diversi in cui può indossare gli anelli.

Problema 11 *(Finale nazionale gara a squadre 2013.) Una notizia inaspettata raggiunge Radice. Il principe ereditario F di cuori è chiamato in tribunale, accusato di aver barato nel gioco di carte Non perdere la testa. Il gioco funziona così: uno dei giocatori fa da mazziere e mischia un mazzo di 52 carte numerate da 1 a 52. Dopodiché, a partire dalla destra del mazziere in senso antiorario, ogni giocatore a turno pesca una carta, tenendola coperta, e il mazziere pesca quindi l'ultima carta. Le carte vengono mostrate tutte insieme e chi ha la carta più bassa esce dal gioco. Per decapitazione. Le carte pescate vengono quindi scartate e si prosegue il gioco come prima, con i giocatori rimasti, utilizzando le carte avanzate nel mazzo. Vince, o meglio sopravvive, l'ultimo giocatore in gara. F di cuori ha vinto una partita con 9 giocatori (lui compreso) da mazziere, avendo mescolato le carte per circa tre ore. Se m è il numero di modi diversi in cui ha potuto mescolare il mazzo per essere sicuro di vincere, per quanti numeri primi distinti è divisibile m? Si ricorda che 1 non è primo.*

Soluzione: Per vincere il mazziere non deve mai avere la carta più bassa tra quelle presenti in gioco. Durante il primo turno i giocatori sono 9 e di conseguenza anche le carte in gioco. In generale il mazziere potrà scegliere le 9 carte tra le 52 presenti nel mazzo in $\binom{52}{9}$ modi. Se potesse suddividerle tra i concorrenti senza alcuna restrizione il mazziere avrebbe 9! modi per farlo. Da queste invece andranno tolte tutte le combinazioni di carte che non permetterebbero al mazziere di restare in gioco e sono 8! (ovvero, data al mazziere la carta più bassa, tutte le permutazioni delle restanti 8 carte). Avrà quindi $\binom{52}{9} \cdot (9! - 8!) = \binom{52}{9} \cdot 8 \cdot 8!$ modi di distribuire le carte senza essere eliminato. Nel turno successivo in cui ci sarà un giocatore in meno avrà analogamente $\binom{43}{8} \cdot 7 \cdot 7!$ modi. E così via fino all'ultimo turno in cui potrà quindi vincere in $\binom{10}{2}$ modi diversi. L'ordine delle restanti 8 carte del mazzo non influisce sull'esito del gioco e potranno essere mescolate in 8! modi. Quindi m sarà uguale al prodotto di tutti i termini precedentemente trovati: $m = \frac{52}{9}$ che è divisibile per 15 numeri primi distinti.

Problema 12 *Una pulce salta sui punti di coordinate intere dello spazio, partendo da* $(0, 0, 0)$*. Ogni suo salto consiste nell'incrementare di* 1 *una e una sola delle* 3 *coordinate. In quanti modi può arrivare in* $(3, 3, 3)$ *rimanendo sempre sulla superficie del cubo di lato 3 avente un vertice in* $(0, 0, 0)$ *e gli spigoli paralleli agli assi cartesiani?.*

Soluzione: Per cominciare troviamo quanti sono i percorsi che vanno da A a G intersecando lo spigolo BF, cioè rimanendo sulle 2 facce laterali ABFE e BCGF. E' semplice verificare che i percorsi che vanno da A a G compiendo solo spostamenti di un passo a destra o in alto sono $\binom{9}{3}$, cioè 84. Infatti per andare da A a G bisogna fare 6 spostamenti a destra, che denoteremo con D, e 3 spostamenti in alto, che denoteremo con A. Ad ogni parola di 9 lettere, contenente 6 D e 3 A corrisponderà un percorso diverso. Possiamo quindi concludere che i percorsi da A a G sono tanti come gli anagrammi della parola AAADDDDDD, cioè proprio $\binom{9}{3}$. Analogamente si trova che sono 84 anche i percorsi che vanno da A a G intersecando uno qualsiasi degli altri spigoli che non contengono A o G. Passiamo ora a contare i percorsi che vanno da A a G passando per C. Procedendo come prima si trova che essi sono $\binom{6}{3}$, cioè 20. Analogamente si trova che sono 20 anche i percorsi da A a G che passano per B, F, E, H o D. Siamo ora in grado di completare la soluzione del problema. Infatti, se ci chiediamo quali sono i percorsi che vanno da A a G intersecando la spezzata EFB, otterremo che prendendo tutti quelli che intersecano EF ed FB avremo contato due volte quelli che passano per F. Ciò significa che i percorsi che vanno da A a G intersecando la spezzata EFB sono $84+84-20$, cioè 148. Analogamente sono 148 anche i percorsi che intersecano la spezzata DHE e quelli che intersecano la spezzata BCD. Ora, l'insieme di tutti i percorsi cercati coincide con l'insieme di tutti quelli che vanno da A a G intersecando la spezzata chiusa EF BCDHE. Se per trovarli mettiamo insieme quelli delle tre spezzate EF B, BCD e DHE, avremo contato due volte quelli che passano per E, per B o per D. Quindi, in tutto, i percorsi cercati sono $3 \cdot 148 - 3 \cdot 20$, cioè 384.

Problema 13 *In quanti modi posso scegliere un insieme di* 5 *numeri interi tra* 1 *e* 50 *in modo che la differenza tra due qualsiasi di essi sia almeno* 10*?*

Soluzione: Consideriamo la combinazione ordinata di numeri: $A_0 = \{1, 11, 21, 31, 41\}$. Essa non solo è una delle combinazioni che il problema richiede di contare, ma è anche quella la cui somma dei numeri di cui è composta è minore. Proviamo a ricavare tutte le altre sommando a ciascun termine della combinazione giuste quantità. Ogni qual volta che si aggiunge un numero ad un termine, affinché la combinazione risulti valida, dovrà essere sommato almeno tale numero a ciascun termine successivo. In generale ciò che è importante è che la quantità sommata ad un qualsiasi termine della combinazione non sia mai inferiore a quella sommata al termine precedente. L'unica restrizione ma fondamentale ai fini del problema è che l'ultimo termine non sia maggiore di 50. Adesso per ogni combinazione $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ trovata in questo modo, consideriamo la sequenza di numeri B_n formata dai termini di A_n meno quelli di A_0: $B_n = \{a_1 - 1, a_2 - 11, \ldots, a5 - 41\}$. Tutte le B_n così costruite, sono quelle successioni non decrescenti formata da 5 numeri i quali termini sono compresi tra 0 e 9 (estremi inclusi). Il problema è quindi equivalente a calcolare in quanti modi si può ottenere un qualsiasi numero da 0 a 9 come somma di 5 interi non negativi. Tali modi per un numero generico n si calcolano come delle semplici combinazioni con ripetizione, quindi $S_n = \binom{n+k-1}{k-1}$ con $k = 5$. Pertanto il numero totale risulterà

$$\sum_{n=0}^{9} S_n = \sum_{n=0}^{9} \binom{n+4}{4} = \binom{14}{5} = 2002.$$

Problema 14 *(Dal Concorso di ammissione alla SSC 2016) Sei persone si incontrano per caso in un bar. Dimostrate che ce ne sono tre di loro che o si conoscevano già l'una con l'altra (ognuna delle tre conosceva le altre due), o non si conoscevano ancora l'una con l'altra (nessuna delle tre conosceva* *nessuna delle altre due). Si supponga che "conoscersi" sia una relazione simmetrica, cioè se A conosce B, anche B conosce A.*

Soluzione: Fissiamo una delle sei persone A. Fra le altre 5 persone, ce ne devono essere tre, diciamo B, C , D, tali che o conoscono tutte A, o nessuna conosce A. Basta considerare il primo caso, il secondo è analogo. Se due di queste si conoscono fra loro, ad esempio B, C, allora con A fanno tre persone A, B, C che si conoscono fra loro. Altrimenti B, C, D non si conoscono fra loro.

Problema 15 *(Dal Concorso di ammissione alla SSC 2013)*
Sia n un numero intero e sia

$$f_n(x) = x^n + (k+1)x^{n-1} + (2k+1)x^{n-2} + \ldots + ((n-1)k+1)x + nk + 1 = \\ = \sum_{i=0}^{n} \Big((n-i)k+1\Big)x^i$$

per un certo valore k reale. Si provi che $f(1-k) = n+1$.

Soluzione: Procediamo per induzione su n.
Se $n = 1$ si ha $f_1(x) = x + k + 1$ da cui $f_1(1-k) = 2$.
Supponiamo ora che la tesi valga per $n-1$. Se $k = 0$ si vede subito sostituendo che $f_n(1-k) = f_n(1) = n+1$, assumendo allora k non nullo si ha

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + (k+1)x^{n-2} + \ldots + ((n-2)k+1)x + (n-1)k + 1 + \\ + k(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1).$$

Dunque applicando la formula per la somma di una progressione geometrica otteniamo

$$f_n(x) = x^n + f_{n-1}(x) + k\frac{x^n - 1}{x-1}.$$

Infine sfruttando l'ipotesi induttiva si vede facilmente che $f_n(1-k) = n+1$.

Problema 16 *Si vogliono riempire cinque recipienti R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, con cinque liquidi L_1, L_2, L_3, L_4, L_5. In ogni recipiente si può versare un solo liquido ed il recipiente R_i non può contenere il liquido L_i. Determinare in quanti modi distinti è possibile riempire i recipienti.*

Soluzione: Risolviamo il problema usando il principio di inclusione esclusione, contando tutte le permutazioni e sottraendo tutti i casi in cui un liquido viene messo in una posizione proibita, riaggiungendo tutti i casi in cui due liquidi vengono messi in posizione proibita e così via, sottraendo infine l'unico caso in cui ogni liquido L_i viene assegnato al recipiente R_i. La soluzione quindi è data da

$$5! - \binom{5}{1}4! + \binom{5}{2}3! - \binom{5}{3}2! + \binom{5}{4}1! - 1 = 44.$$

Problema 17 *Determinare la probabilità $P(n)$ che, in un gruppo di n persone selezionate casualmente (nessuna nata in un anno bisestile) almeno due di esse compiano gli anni nello stesso giorno.*

Soluzione: Sia $P'(n)$ la probabilità che le n persone non compiano gli anni nello stesso giorno, la data di nascita di una persona è stocasticamente indipendente da quella delle altre, quindi si ottiene facilmente che

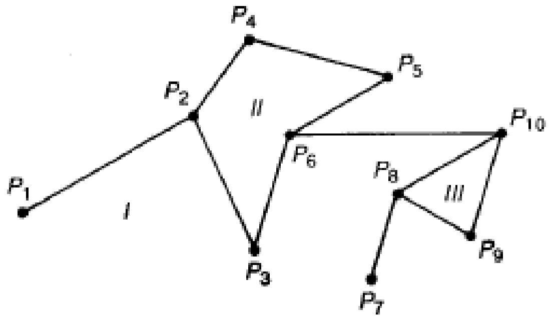
$$P'(n) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365} = \frac{364!}{365^{n-1}(365-n)!}.$$

La probabilità cercata è quindi $P(n) = 1 - P'(n)$.

Problema 18 *Definiamo "mappa rettilinea" un insieme finito di segmenti nel piano che colleghino $n > 1$ punti $P_1, \dots, P_n$ e che non si intersechino in altri punti. Sia inoltre possibile partire da uno qualunque dei punti $P_1, \dots, P_n$ e raggiungere uno qualsiasi degli altri, muovendosi lungo i segmenti della mappa. Sia r il numero delle regioni in cui il piano viene suddiviso dalla mappa ed s il numero dei segmenti. Dimostrare che $r + n = s + 2$.*

Soluzione: Procediamo per induzione su s.
Passo base: $s = 1$ e la mappa rettilinea consiste solo di due punti collegati da un segmento, la regione di piano è una sola, quindi $r + n = s + 2 = 3$.
Passo induttivo: ammettiamo di avere una mappa con s segmenti tale che $r + n = s + 2$, aggiungiamo un segmento e distinguiamo due casi:

(1) Il nuovo segmento non forma una nuova regione di piano. In questo caso il numero di segmenti aumenta di uno, insieme al numero dei punti (viene aggiunto il punto corrispondente al secondo estremo del nuovo segmento) pertanto la tesi è verificata.



(2) Il nuovo segmento forma una nuova regione di piano, collegando due punti già esistenti. Di conseguenza r aumenta di uno insieme al numero dei segmenti e anche in questo caso la tesi è verificata.

Problema 19 *Durante un mese di* 30 *giorni, una squadra di baseball gioca almeno un match al giorno ma non più di* 45. *Dimostrare che esiste un periodo di giorni consecutivi durante i quali la squadra gioca esattamente* 14 *match.*

Soluzione: Sia a_j il numero di match giocati a partire dal primo fino al j-esimo giorno del mese (incluso). Allora $a_1, \ldots, a_{30}$ è una sequenza crescente di interi positivi con $0 < a_j < 46$. Inoltre anche $a_1 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ è una sequenza crescente di interi positivi con $14 < a_j + 14 < 60$.
I 60 interi positivi $a_1, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ sono tutti minori di 60, quindi per il principio dei cassetti due di essi sono uguali e non appartengono alla stessa sequenza (perché le due sequenze sono strettamente crescenti). Quindi esistono due indici i e j tali che $a_i = a_j + 14$, ovvero, esattamente 14 match vengono giocati dal giorno $j + 1$ al giorno i.

Problema 20 *Si dimostri l'identità di Vandermonde:*

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}.$$

Soluzione: Siano A e B due insiemi digiunti tali che $|A| = m$ e $|B| = n$. Vi sono $\binom{n+m}{r}$ sottoinsiemi di $A \cup B$ aventi cardinalità r.
Adesso contiamo in modo differente i sottoinsiemi di $A \cup B$ aventi cardinalità

r. Si fissi $k \in \{0, 1, \dots, r\}$. Si prenda $A_1 \subseteq A$ tale che $|A_1| = r - k$ (questo si può fare in $\binom{m}{r-k}$ modi) e si fissi $B_1 \subseteq B$ tale che $|B_1| = k$ (questo si può fare in $\binom{n}{k}$ modi). Allora $A_1 \cup B_1$ è un sottoinsieme di $A \cup B$ avente cardinalità r. Per la regola del prodotto, le coppie di insiemi A_1 e B_1 possono essere scelte, per un k fissato, in $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ modi differenti. Poichè k varia da 0 ad r, la regola della somma ci dice che il numero di sottoinsiemi di $A \cup B$ aventi cardinalità r è dato da $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$.