Lezione 1 - Introduzione e Combinatoria

Problema 1 *Dimostrare che per ogni intero $n > 0$*

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + \ldots + (3n-2)^2 = n(6n^2 - 3n - 1)/2$$

Soluzione: Proviamo la tesi per induzione. Per $n = 1$ si ha $1^2 = 1 \cdot (6 - 3 - 1)/2$ e quindi il passo base è verificato.
Assumendo che la tesi sia vera per $n = k$, ovvero $1^2 + 4^2 + \ldots + (3k-2)^2 = k(6k^2 - 3k - 1)/2$, si ha:
$1^2 + \ldots + (3k-2)^2 + (3(k+1)-2)^2 = k(6k^2 - 3k - 1)/2 + (3k+1)^2 =$
$= (6k^3 + 15k^2 + 11k + 2)/2 = (6(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - 3(k^2 + 2k + 1) - (k+1))/2 =$
$= (6(k+1)^3 - 3(k+1)^2 - (k+1))/2 = (k+1)(6(k+1)^2 - 3(k+1) - 1)/2.$
Ciò conclude la dimostrazione.

Problema 2 *In un mazzo standard di 52 carte, quante diverse mani da 5 carte ci sono per ognuno dei seguenti tipi?*

1. *Poker: 4 carte dello stesso valore (e una di valore diverso).*
2. *Full House: 3 carte di un valore, 2 di un altro valore.*
3. *Colore: 5 carte dello stesso seme*

Soluzione:

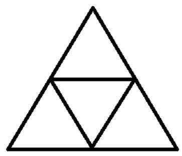
1. Ci sono 13 modi di prendere il valore che appare 4 volte e $\binom{4}{4} = 1$ modi di scegliere le quattro carte tra le 4 che hanno questo valore. Poi ci sono (52-4)=48 modi di scegliere la quinta carta. In totale le combinazioni sono $4 \cdot 1 \cdot 48 = 624$
2. Ci sono 13 modi per scegliere il valore che appare 3 volte e $\binom{4}{3} = 4$ modi di scegliere le tre carte tra le 4 che hanno quel valore specifico.

Dopo ci sono 12 modi di scegliere il valore che appare 2 volte (perché rimangono 12 valori) e $\binom{4}{2} = 6$ modi di scegliere le 2 carte tra le 4 che hanno quel valore. Quindi il numero di Full House possibili è $13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$.

3. Fissato il seme, il numero di modi di scegliere 5 carte tra le 13 carte di quel seme è $\binom{13}{5}$. Siccome ci sono 4 semi, il risultato è $\binom{13}{5} \cdot 4 = 5148$.

Problema 3 *Scegliamo* 5 *punti in un triangolo equilatero di lato* 4*. Provare che ci sono* 2 *punti la cui distanza è al massimo* 2*.*

Soluzione: Dividiamo il triangolo in 4 triangoli equilateri di lato 2 come in figura. Per il principio dei cassetti, un triangolo contiene 2 punti. Essendo



la distanza massima in un triangolo equilatero pari al lato, si ha la tesi.

Problema 4 *Dimostrare che per ogni intero* $n \geq 2$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Soluzione: Procediamo per induzione. Il caso base $n = 2$ equivale al fatto che $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, che è vero. Supponiamo la tesi vera per $n = k$ e dimostriamola per $k + 1$. Osserviamo che per l'ipotesi induttiva:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} \cdot \left(1-\frac{1}{k+1}\right).$$

Ma vale inoltre:

$$\frac{1}{k} \cdot \left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}.$$

Ciò conclude la dimostrazione.

Problema 5 *Un ragno ha 8 zampe, inizialmente scalze, e vuole indossare una calza e una scarpa per ogni zampa. Per evitare confusione, ha numerato le zampe da 1 a 8, e ha fatto lo stesso per ogni calza e scarpa: dunque, indosserà la calza i e la scarpa i nella zampa i. Ad ogni passo, sceglie una calza o una scarpa e la indossa nella zampa corrispondente. Un* ordinamento *è la sequenza delle 16 scelte effettuate. In quanti ordinamenti diversi può indossare tutte le 16 calze e scarpe, considerando che può indossare una scarpa solo se la corrispondente calza è già stata indossata?*

Soluzione: Il numero totale di ordinamenti di scarpe e calze (senza considerare se una scarpa viene o prima o dopo la corrispondente calza) è 16!. Tra questi, in esattamente la metà la prima scarpa si trova prima della prima calza e vanno quindi eliminati. Tra i rimanenti, la metà hanno la seconda scarpa prima della seconda calza, e così via. In definitiva, il numero di ordinamenti validi è $\frac{16!}{2^8}$.

Problema 6 51 *piccole formiche gironzolano in un quadrato di lato* 1*. Provare che in ogni momento ci sono almeno* 3 *formiche che possono essere ricoperte dallo stesso disco di raggio* 1/7*.*

Soluzione: Dividiamo il quadrato in 25 quadratini di lato 1/5. Per il principio dei cassetti esiste almeno un quadratino contenente 3 formiche. Questo quadratino di lato 1/5 è inscritto al cerchio di raggio $\sqrt{2}/10$, che è minore di 1/7. Allora il disco di raggio 1/7 può ricoprire per intero il quadratino. Ciò conclude la dimostrazione.

Problema 7 *Sulla superficie di una sfera vi sono* 5 *punti. Dimostrare che esiste una semisfera chiusa (ossia, metà sfera, incluso il bordo) contenente almeno* 4 *punti.*

Soluzione: Consideriamo un cerchio massimo che passi per 2 punti, definendo così 2 semisfere: per il principio dei cassetti, una delle due contiene almeno 2 dei punti rimanenti. Insieme ai due punti sul cerchio massimo, questa semisfera contiene almeno 4 punti.

Problema 8 *Una barretta di cioccolato è un rettangolo composto da $m \times n$ quadratini. In una mossa Claudio Silvestri, il cuoco della nazionale di SSCalcio che al mattino non ha mai dubbi, prende un pezzo di cioccolato con almeno 2 quadratini e lo spezza in due pezzi lungo un segmento parallelo ai bordi. In quante mosse il cuoco ottiene $m \times n$ quadratini singoli?*

Soluzione: Anche se è possibile dimostrare l'esercizio per induzione su m e n, è più facile risolvere l'esercizio per induzione su k, dove k è il numero di pezzi di una barra di cioccolato rettangolare. Proviamo che il numero di tagli richiesti è sempre il numero dei quadratini meno uno. Se $k = 1$, allora sono richiesti zero tagli, $0 = 1 - 1$, quindi il risultato è corretto.
Assumiamo che la tesi sia vera per ogni barretta di cioccolato con k o meno quadratini. Consideriamo una barra con $k+1$ quadratini. Dopo un primo taglio si hanno 2 barrette più piccole, una con h quadratini, l'altra con $k+1-h$. Entrambe queste barre hanno k o meno quadratini e quindi, per l'ipotesi induttiva, per il primo saranno richiesti $h-1$ tagli, mentre per l'altro $k+1-h-1$ per ridurli in quadratini singoli. Il numero totale di tagli includerà questi numeri più il primo iniziale, per un totale di $(h-1) + (k+1-h-1) + 1 = k$ tagli, come volevamo dimostrare.

Soluzione 2: Notiamo anche che una dimostrazione più semplice di quella induttiva appena esposta potrebbe essere la seguente: ogni taglio produce suddivide un pezzo in due pezzi più piccoli; di conseguenza, ad ogni taglio, il numero totale di pezzi aumenta di 1. Dal momento che iniziamo con 1 pezzo, finendo con $m \cdot n$ pezzi, sono necessari esattamente $m \cdot n - 1$ tagli.

Problema 9 *Al bar dell'Università alcuni studenti stanno commentando le ultime indiscrezioni sulla nazionale che parteciperà ai prossimi europei di SSCalcio in Francia. Pare che il commissario tecnico Antonio Calcoli intenda convocare un portiere, 6 difensori, 6 centrocampisti e 4 attaccanti. Sapendo che per avere una squadra equilibrata non metterà più di 5 o meno di 2 giocatori per ruolo (a meno del portiere!) calcolare le possibili formazioni di 11 giocatori.*

Soluzione: Sia (d, c, a) uno schema dove d è il numero di difensori, c è il numero di centrocampisti e a è il numero di attaccanti. Poiché nella rosa i difensori sono tanti quanti i centrocampisti, le possibili formazioni con lo schema (d, c, a) sono tante quante le possibili formazioni con lo schema (c, d, a).

- Se gli attaccanti sono 2, gli schemi sono $(5, 3, 2)$ e $(4, 4, 2)$, per un totale di $2 \times \binom{6}{5}\binom{6}{3}\binom{4}{2} + \binom{6}{4}\binom{6}{4}\binom{4}{2} = 2790$ formazioni.
- Se gli attaccanti sono 3, gli schemi sono $(5, 2, 3)$ e $(4, 3, 3)$, per un totale di $2 \times \binom{6}{5}\binom{6}{2}\binom{4}{3} + 2 \times \binom{6}{4}\binom{6}{3}\binom{4}{3} = 3120$ formazioni.

- Se gli attaccanti sono 4, gli schemi sono $(4,2,4)$ e $(3,3,4)$, per un totale di $2 \times \binom{6}{4}\binom{6}{2}\binom{4}{4} + \binom{6}{3}\binom{6}{3}\binom{4}{4} = 850$ formazioni.

La soluzione è dunque $2790 + 3120 + 850 = \mathbf{6760}$ formazioni.

Problema 10 *Chiamiamo pronunciabile una parola in cui non compaiano due o più consonanti di fila. Quanti sono gli anagrammi pronunciabili della parola Matematica?*

Soluzione: Osserviamo che nella parola matematica sono presenti 5 vocali e 5 consonanti. Per far si che il generico anagramma sia pronunciabile è necessario che per ogni coppia di consonanti adiacenti sia presente una vocale che li divida. Indichiamo con "C" una posizione occupata da una consonante e con "V" una posizione occupata da una vocale. Otteniamo così un anagramma del tipo $CVCVCVCVC$ a cui dobbiamo ancora aggiungere una vocale. Questa può essere inserita tra due consonanti o agli estremi della parola, e dunque in 6 modi (si noti che al momento non distinguiamo tra le diverse consonanti e le vocali). Una volta fissate le posizioni dove sono contenute vocali e consonanti, calcoliamone le permutazioni noto che la "m" e la "t" si ripetono 2 volte e la "a" si ripete 3 volte, e tutte le altre lettere non si ripetono. La soluzione sarà dunque

$$6 \cdot \frac{5!}{2!2!} \cdot \frac{5!}{3!} = \mathbf{3600}.$$

Problema 11 *Si consideri la seguente successione:*

$$\begin{aligned} &A_0 = 0, \\ &A_1 = 3, \\ &A_n = 7A_{n-1} - 10A_{n-2} \text{ per } n \geq 2. \end{aligned}$$

Dimostrare che $A_n = 5^n - 2^n$ per ogni numero naturale n.

Soluzione: Procediamo per induzione. Per $n = 0$, si ha che $5^0 - 2^0 = 0 = A_0$; per $n = 1$, abbiamo che $5^1 - 2^1 = 3 = A_1$. Sia ora $n \geq 2$. Assumiamo la tesi vera per $n-1$ ed $n-2$, e dimostriamola per n. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
A_n &= 7A_{n-1} - 10A_{n-2} \\
&= 7(5^{n-1} - 2^{n-1}) - 10(5^{n-2} - 2^{n-2}) && \text{(per ipotesi induttiva)} \\
&= 7(5 \cdot 5^{n-2} - 2 \cdot 2^{n-2}) - 10(5^{n-2} - 2^{n-2}) \\
&= 35 \cdot 5^{n-2} - 14 \cdot 2^{n-2}) - 10 \cdot 5^{n-2} + 10 \cdot 2^{n-2}) \\
&= 25 \cdot 5^{n-2} - 4 \cdot 2^{n-2} \\
&= 5^n - 2^n
\end{aligned}$$

e la dimostrazione è conclusa.

Problema 12 *Tra le prime squadre allenate dal commissario tecnico Antonio Calcoli va citato l'atletico SSC. Proprio su questa squadra, Calcoli, in una intervista, essendo un po' impreparato, fece una clamorosa gaffe sbagliando il numero di vittorie, pareggi e sconfitte in un torneo locale. Il torneo era composto da 6 squadre, dove ognuna gioca due partite con ogni altra (andata e ritorno). Ogni vittoria vale 3 punti, ogni pareggio 1 punto e ogni sconfitta 0. Noto che la SSC totalizzò 18 punti, quante sono le possibili successioni di vittorie, pareggi e sconfitte?*

Soluzione: Chiamiamo x il numero di vittorie e y il numero di pareggi ed esprimiamo il punteggio come $18 = 3x + y$ dove $0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 10$. Le uniche soluzioni di questa equazione sono $(6, 0), (5, 3), (4, 6)$. Si noti che, una volta fissati x e y, il numero z di sconfitte è $10 - x - y$. Per ogni soluzione (x, y, z) calcoliamo le permutazioni con ripetizione di 10 elementi. La risposta sarà perciò

$$\frac{10!}{6!0!4!} + \frac{10!}{5!3!2!} + \frac{10!}{4!6!0!} = \mathbf{2940}.$$

Problema 13 *Il 14 Marzo verso le 15:96 allo stadio Massimominimo dell'Atletico SSC gli spettatori si trovano divisi su S file tali che ogni fila abbia almeno 5 tifosi e che non esistano due file con lo stesso numero di tifosi. La settimana dopo alcuni dei tifosi venuti il 14 Marzo restano a casa. Gli altri tornano tutti e si dispongono su S file, ma in modo che se due persone erano sedute nella stessa fila il 14 Marzo, ora sono seduti in file diverse; anche questa volta, non esistono due file con lo stesso numero di tifosi, e ogni fila contiene almeno 5 tifosi.*
Dimostrare che almeno $4S + 10$ tifosi sono rimasti a casa il 21 Marzo.

Soluzione: La prima divisione in file ha $5 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_S$ tifosi nelle S file, allora $c_k \geq k+4$ per $1 \leq k \leq S$. Il numero totale dei membri è

$$N \geq \sum_{k=1}^{S}(k+4) = \frac{(S+4)(S+5)}{2} - 10.$$

Dopo la seconda divisione nessuna delle S file può avere più di $S+1$ tifosi (servirebbero almeno $S+1$ file originali). Il numero di tifosi delle nuove file è

$$M \leq \sum_{k=5}^{S} k = \frac{S(S+1)}{2} - 10.$$

La differenza è maggiore o uguale della differenza fra il valore minimo di N e il massimo di M, perciò

$$N - M \geq \left(\frac{(S+4)(S+5)}{2} - 10\right) - \left(\frac{S(S+1)}{2} - 10\right) = 4S + 10$$

tifosi sono lasciati fuori dalle nuove file, come volevasi dimostrare.

Problema 14 *Dimostrare che la somma dei cubi dei primi n interi positivi è un quadrato perfetto.*

Soluzione: Dimostriamo per induzione che: $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Ciò implica la tesi, dal momento che $n(n+1)/2$ è sempre un numero intero. Il passo base, per $n=1$, è $1^3 = (1 \cdot 2/2)^2$, che è vera. Supponiamo dunque la tesi per $n-1$, e dimostriamola per n. Abbiamo:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 + n^3$$

per l'ipotesi induttiva. Per completare la dimostrazione, dobbiamo quindi verificare che: $\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ossia:

$$\frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4} + n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4},$$

che è vero, il che conclude la dimostrazione.

Problema 15 *Da un mazzo di 52 carte abbiamo tolto delle carte, avendo cura di lasciare tutti gli assi. Sapendo solo che estraendo quattro carte a caso la probabilità di pescare i quattro assi è $\frac{1}{1001}$, determinare quante carte sono state tolte dal mazzo.*

Soluzione: Chiamiamo n le carte rimaste nel mazzo. la probabilità di pescare quattro carte e trovare i quattro assi è

$$\frac{1}{1001} = \left(\frac{4}{n}\right)\left(\frac{3}{n-1}\right)\left(\frac{2}{n-2}\right)\left(\frac{1}{n-3}\right)$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 24 \cdot 1001 = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14$$

Segue che il numero di carte rimaste è 14. La risposta sarà dunque **38**.

Problema 16 *Qual è il numero massimo di cavalli che si possono posizionare su una scacchiera* 8×8 *in modo tale che nessuno di essi minacci un altro cavallo?*

Soluzione: Occupando con 32 cavalli tutte e sole le caselle di colore nero si ha che ogni pezzo minaccia solo caselle di colore bianco e quindi non minaccia nessun altro cavallo. Dimostriamo adesso che non esistono soluzioni con più di 32 cavalli. Supponiamo quindi che 33 cavalli siano posizionati sulla scacchiera. Suddividiamo la scacchiera in 8 rettangoli 4×2. Per il principio dei cassetti, vi sarà allora un rettangolo con almeno 5 cavalli. Osserviamo che ogni cavallo sulla prima riga di tale rettangolo minaccia esattamente una casella della seconda riga, e viceversa. Di conseguenza, possiamo dividere le 8 caselle in 4 coppie tali che se entrambe sono occupate da un cavallo, questi si minacciano a vicenda. Poiché vi sono 5 cavalli, una coppia contiene due caselle occupate da cavalli, e ciò conclude la dimostrazione.

Problema 17 25 *ragazzi e* 25 *ragazze sono seduti attorno ad una tavola rotonda. Dimostrare che esiste almeno una persona i cui vicini sono due ragazze.*

Soluzione: Chiamiamo le persone $p_1, p_2, \ldots, p_{50}$, nell'ordine in cui sono sedute (quindi p_1 è vicino a p_2, p_2 è vicino a p_3, $\ldots$, p_{50} è vicino a p_1). Consideriamo i due sottoinsiemi ordinati $A = \{p_1, p_3, \ldots, p_{49}\}$ e $B = \{p_2, p_4, \ldots, p_{50}\}$. Uno dei due insiemi contiene almeno 13 ragazze. Senza perdita di generalità, supponiamo che A contenga almeno 13 ragazze (si ragiona in modo analogo se B ha almeno 13 ragazze). Immaginiamo di disporre ordinatamente le persone di A intorno ad una tavola più piccola da 25 posti. Poiché vi sono 25 posti ed almeno 13 ragazze, due ragazze sono vicine nella tavola più piccola. Ma allora nella tavola iniziale vi era esattamente una persona seduta tra queste due ragazze. Ciò conclude la dimostrazione.

Problema 18 *Siano m, n, k interi positivi, tali che $k \leq m$ e $k \leq n$. In quanti modi si possono disporre k torri su una scacchiera $m \times n$ in modo che a due a due non si attacchino tra loro?*

Soluzione: È sufficiente osservare che per prendere k torri che non si attacchino tra loro, le torri devono stare a due a due in righe e colonne diverse. Segue il numero di modi di scegliere k righe e k colonne è:

$$\binom{m}{k}\binom{n}{k}$$

Scelte le possibili caselle in cui posizionare le torri osserviamo che nella prima colonna scelta possiamo posizionare una torre in k modi, nella seconda in $k-1$ modi, ecc., fino all'ultima che sarà determinata dalla disposizione delle torri già posizionate. Dunque, possiamo posizionare le torri nelle righe e colonne scelte in esattamente $k!$ modi. In conclusione il risultato cercato è:

$$\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!$$

Problema 19 *In qualunque insieme di* 11 *interi distinti, esiste sempre un sottoinsieme di* 6 *elementi tali che la loro somma è divisibile per* 6.

Soluzione: Applicando il principio dei cassetti, notiamo che su 11 elementi almeno 3 sono uguali modulo 3. Consideriamo gli 8 elementi rimasti e ancora prendiamo una tripla avente tutti gli elementi uguali modulo 3. Quindi sugli ultimi 5 elementi rimasti o 3 sono uguali oppure possiamo trovare 3 elementi distinti per il principio dei cassetti. In entrambi i casi abbiamo ottenuto tre triple tali che la somma dei loro elementi è divisibile per 3. In particolare, di queste 3 somme, due sono uguali tra loro mod 2, e dunque la loro somma sarà divisibile per 3 e per 2. Da ciò segue la tesi.

Problema 20 *Dimostrare che, per ogni intero $n \geq 1$, vale la seguente disuguaglianza:*

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \frac{5}{2}.$$

Soluzione: La disuguaglianza è banalmente vera per $n = 1$. Per ogni $n \geq 2$, dimostriamo che vale la disuguaglianza più forte:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

Procediamo per induzione. Il passo base $n = 2$ equivale a $(1+1/2)(1+1/4) \leq (5/2)(1 - 1/4)$, ossia $(3/2)(5/4) \leq (5/2)(3/4)$, che è vera. Supponiamo ora la tesi vera per $n \geq 2$, e dimostriamola per $n + 1$. Abbiamo:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

per ipotesi induttiva. Per completare il passo induttivo, vogliamo quindi verificare che

$$\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

che equivale a:

$$1+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n+1}} \leq 1-\frac{1}{2^{n+1}}$$

che, semplificando, si riduce a:

$$-\frac{1}{2^{2n+1}} \leq 0$$

ovviamente vera. Ciò conclude la dimostrazione.

Problema 21 *L'insieme M è formato da 2001 interi positivi non divisibili per nessun numero primo strettamente maggiore di 23. Dimostrare che esistono quattro interi distinti a, b, c, d in M tali che $abcd = u^4$ per qualche intero positivo u.*

Soluzione: Grazie all'ipotesi che tutti i numeri di M non sono divisibili per nessun primo maggiore di 23, segue che questi possono essere scomposti nel prodotto dei primi 9 numeri primi p_i (da 2 fino a 23), con $1 \leq i \leq 9$, ovvero $n \in M \Rightarrow n = \prod_{i=1}^{9} p_i^{a_i}$. Ricordiamo che il prodotto di due numeri è un quadrato perfetto se tutti gli esponenti dei fattori primi del prodotto sono pari. In particolare, poiché $n \cdot m = \prod_{i=1}^{9} p_i^{a_i+b_i}$ $\forall n, m \in M$, per ogni i si ha che $a_i + b_i$ deve essere pari, ovvero a_i ha la stessa parità di b_i.
Quindi per poter trovare due 9-uple uguali mod 2 calcoliamo le possibili 9-uple distinte $\mod 2$. Queste sono $2^9 = 512$. Dunque per il principio dei cassetti, ogni 513 interi in M almeno due sono tali che il loro prodotto è un quadrato. Creiamo un insieme C dove inseriremo il prodotto dei due numeri trovati ed eliminiamo questi ultimi da M, dunque ripetiamo il processo. Questo può essere ripetuto finché ci sono almeno 513 elementi in M e dunque $(2001 - 513)/2 = 744$ volte. Segue che in C vi sono $744 > 513$ interi da cui

segue per il principio dei cassetti che almeno due hanno gli esponenti dei relativi fattori primi congruenti a due a due $\mod 4$ e dunque il loro prodotto è una potenza di 4.

Problema 22 *Sia $n = 2^k$. Dimostrare che da $2n-1$ interi qualsiasi se ne possono sempre scegliere esattamente n tali che la loro somma sia divisibile per n.*

Soluzione: Dimostriamo la tesi per induzione su k. Se $k = 0$ la tesi è banale. Supponiamo che la tesi sia vera per $k-1$ e dimostriamo l'asserto per k.
Consideriamo $2^{k+1}-1$ interi. Per l'ipotesi induttiva possiamo sceglierne 2^{k-1} da questi, la cui somma è divisibile per 2^{k-1}, che indicheremo con $p_1 2^{k-1}$. Togliendo questi ne rimangono $2^{k+1} - 2^{k-1} - 1$ (che è ancora maggiore di $2^k - 1$), di nuovo per l'ipotesi induttiva ne scegliamo 2^{k-1} la cui somma sarà un certo $p_2 2^{k-1}$, da cui ne rimangono $2^{k+1} - 2 \cdot 2^{k-1} - 1 = 2^k - 1$, ripetende il procedimento di prima otteniamo 2^{k-1} interi la cui somma sarà un certo $p_3 2^{k-1}$. Abbiamo ottenuto cosi tre gruppi di 2^{k-1} interi con somme rispettivamente $p_1 2^{k-1}, p_2 2^{k-1}, p_3 2^{k-1}$, per il principio dei cassetti almeno due tra p_1, p_2, p_3 hanno lo stesso resto nella divisione per 2, quindi la somma di almeno due di questi tre sarà divisibile per 2, quindi l'unione dei rispettivi due gruppi costituisce un insieme di 2^k interi la cui somma è divisibile per 2^k.

Problema 23 *Data una griglia $n \times n$ ed un intero k tale che $1 \leq k \leq n$, Antonio Calcoli, per passare il tempo tra una vittoria e l'altra, disegna k rettangoli aventi un vertice coincidente col vertice in basso a sinistra della griglia e il vertice in alto a destra su un altro punto della griglia, quindi colora di nero la superficie coperta dai rettangoli ed ottiene una figura. Quante sono le figure diverse che si possono ottenere con k rettangoli, che non siano ottenibili con meno di k rettangoli?*

Soluzione: Dato un punto sulla griglia, questo individua un rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani ed un vertice coincidente con il vertice in alto a destra.
Osserviamo che non esiste nessuna coppia di punti di coordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2), tali che $x_1 \leq x_2$ e che $y_1 \leq y_2$: in caso contrario, la figura sarebbe ottenibile con meno di k rettangoli. Viceversa, se la figura non è ottenibile con meno di k rettangoli, allora non esiste una coppia siffatta. Dimostriamo ora

che una figura che soddisfi le condizioni richieste è univocamente determinata dalla scelta di k righe e k colonne.
Consideriamo l'insieme dei k^2 punti che sono vertici in alto a destra di un quadratino della griglia. Chiaramente, Antonio può scegliere solo questi punti come vertici in alto a destra dei suoi rettangoli. Indichiamo con $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ le ascisse delle k colonne e con $y_1 < y_2 < \ldots < y_k$ le ordinate dei punti scelti da Antonio. Sulla prima colonna deve esserci un punto, o per il principio dei cassetti una colonna conterrà due punti, che è assurdo (per la condizione scritta su). Questo punto di ascissa x_1 dovrà avere ordinata y_k o altrimenti il punto sulla riga y_n avrebbe ascissa e ordinata maggiori del punto in questione, il che implica un assurdo, dunque il primo punto ha coordinate (x_1, y_k). Procedendo per induzione assumiamo che per ogni $1 \leq h < m \leq k$ il punto di coordinata x_h abbia ascissa (y_{k-h}). Allora mostriamo che il punto di ascissa x_m deve avere ordinata y_{k-m}. Naturalmente nelle righe di ordinata maggiore è già presente un punto dunque assumiamo che l'ordinata dell'm-esimo punto sia minore di y_{k-m}. Segue che il punto sulla riga di ordinata y_{k-m} ha ordinata e ascissa (grazie all'ipotesi induttiva) maggiori del punto in questione, che è assurdo.
Da quanto detto sopra, segue che la risposta è il numero di modi possibili di scegliere k ascisse e k ordinate tra quelle valide, ossia:

$$C_k = \binom{n}{k}^2.$$

Problema 24 *Dimostrare che, per ogni intero $n \geq 1$, vale la seguente disuguaglianza:*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

Soluzione: Dimostriamo la disuguaglianza più forte:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Dal momento che $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$, ciò implica la disuguaglianza richiesta. Procediamo per induzione. Il caso base $n = 1$ equivale a $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, che è vera. Supponiamo adesso la tesi vera per $n = k$ e proviamola per $n = k+1$. Allora per l'ipotesi induttiva:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Dunque, la tesi si riduce a dimostrare che:

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}},$$

ossia:

$$\frac{2n+1}{2k+2} \leq \frac{\sqrt{3k+1}}{\sqrt{3k+4}},$$

cioè, elevando entrambi i membri al quadrato:

$$\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} \leq \frac{3k+1}{3k+4},$$

o ancora:

$$(2k+1)^2(3k+4) \leq (2k+2)^2(3k+1).$$

Espandendo i prodotti e semplificando, si verifica facilmente che l'ultima disuguaglianza equivale a $k \geq 0$, ovviamente vera. Ciò conclude la dimostrazione.

Problema 25 *Trovare una formula chiusa (cioè una espressione solo in funzione di n) per:*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2.$$

Soluzione: S_n è il numero di modi in cui si può scegliere commissione, presidente e segretario (con segretario e presidente anche coincidenti) da una folla di n persone (cioè da un insieme di n elementi ne scegliamo due speciali e in più un sottoinsieme arbitrario degli elementi rimasti). Questo perché, se fissiamo il numero totale di persone scelte (presidente più segretario più commissione) uguale a k, le possibile scelte sono pari a $\binom{n}{k}k^2$; sommando su k otteniamo S_n.
Adesso distinguiamo due casi: se il segretario è uguale al presidente allora esso può essere scelto in n modi e la commissione in 2^{n-1} modi (cioè pari ai possibili sottoinsiemi di un insieme di $n-1$ elementi), mentre se il presidente è diverso dal segretario allora essi possono essere scelti in $n(n-1)$ modi, mentre la commissione in 2^{n-2} modi differenti. Otteniamo quindi

$$S_n = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n2^{n-2}(2+n-1) = (n+1)n2^{n-2}$$

Soluzione 2: Una soluzione analitica della formula è la seguente:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k^2 - k) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k =$$

$$= \sum_{k=2}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \binom{n-2}{k-2} k(k-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} k =$$

$$= n(n-1) \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n-2}{k-2} + n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1},$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la nota identità:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$