Lezione 2 - Algebra

Problema 1 *Sia data la seguente successione:*

$$a_1 = 9, \qquad a_n = 9 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \qquad a_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

Determinare a_{1000}.

<u>Soluzione</u>: Riscriviamo la successione nel seguente modo

$$a_n = 9 + a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} a_i = 9 + a_{n-1} + (a_{n-1} - 9) = 2a_{n-1}$$

dove nel penultimo passaggio è stata utilizzata l'espressione degli a_n applicata al termine a_{n-1}. Quindi, $a_{1000} = 2 \cdot a_{999} = 2^2 \cdot a_{998} = \ldots = 2^{999} a_1 = 9 \cdot 2^{999}$.

Problema 2 *Dati gli interi positivi* $a_0 \ldots a_{100}$ *con* $a_1 > a_0, a_2 = 3a_1 - 2a_0, a_3 = 3a_2 - 2a_1, \ldots, a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$, *dimostrare che* $a_{100} > 2^{99}$.

<u>Soluzione</u>: Notiamo $a_1 - a_0 \geq 1$. Inoltre osserviamo che $a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$ per ogni $n = 1 \ldots 100$. Costruiamo la successione s_n definita come $s_n = a_n - a_{n-1}$ e notiamo che è una successione geometrica di ragione 2, pertanto $s_n = 2^{n-1} s_1 = 2^{n-1}(a_1 - a_0)$.
Dalla ricorrenza otteniamo che

$$a_{100} = a_{99} + 2(a_{99} - a_{98}) = a_{99} + 2^{99}(a_1 - a_0) > 2^{99}$$

come volevasi dimostrare.

Problema 3 *Sia* $p(x) = x^2 - (a-2)x - a - 1$ *un polinomio a coefficienti reali e siano* x_1, x_2 *le sue soluzioni reali. Determinare* a *in modo che* $x_1^2 + x_2^2$ *sia minimo.*

Soluzione: Riscriviamo

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-2)^2 + 2(a+1) =$$
$$= a^2 - 2a + 6 = (a-1)^2 + 5 \geq 5.$$

Si ha ovviamente l'uguaglianza e quindi il minimo per $a = 1$.

Problema 4 *Siano* a, b *e* c *numeri reali positivi tali che* $abc = \frac{1}{8}$. *Dimostrare che*

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq \frac{15}{16}.$$

Soluzione: Utilizzando la disuguaglianza $AM - GM$ si ottengono le seguenti:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3}{4} \qquad a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = \frac{3}{16}$$

Sommando ambo i membri si ottiene

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$$

L'uguaglianza vale quando $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Problema 5 *Sia* $P(x)$ *un polinomio a coefficienti reali con* $x \in \mathbb{R}$. *Trovare tutti i polinomi tali che*

$$P(P(x)) = (x^2 + x + 1)P(x)$$

Soluzione: Notiamo innanzitutto che il polinomio identicamente nullo $P(x) = 0$ è una soluzione. Indichiamo con n il grado del polinomio. Eguagliando i gradi di entrambi i membri dell'equazione otteniamo che $n^2 = n + 2$ e perció $n = 2$ o $n = -1$. Poiché $n \geq 0$, allora l'unica soluzione accettabile è $n = 2$. Pertanto $P(x)$ è della forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Sostituendo $P(x) = ax^2 + bx + c$ all'espressione iniziale otteniamo $a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c)$ e per l'identità dei polinomi ricaviamo le seguenti equazioni:

$$a = a^3, \quad a + b = (2a^2b), \quad (a + b + c) = (b^2 + ab + 2ac).$$

Risolvendo il sistema otteniamo che $a = b = 1$ e $c = 0$, quindi $P(x) = x^2 + x$. Il polinomio identicamente nullo $P(x) = 0$ lo abbiamo provato separatamente, in quanto è l'unico polinomio con grado non definito, e quindi non poteva essere ottenuto dall'equazione sui gradi.

Problema 6 *Sia $a_1, a_2 \dots a_n$ una successione di interi tale che la media aritmetica dei primi n termini sia sempre uguale a n. Quanto vale a_{2016}?*

<u>Soluzione</u>: Riscriviamo l'equazione :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{n} = n$$

come

$$a_1 + a_2 + \dots a_n = n^2.$$

Pertanto possiamo dedurne che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1 = a_n.$$

Di conseguenza $a_{n-1} = 2(n-1) - 1 = 2n - 3$ e quindi $a_n - a_{n-1} = 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Allora a_n è la progressione aritmetica $a_n = 2n - 1$, ovvero la successione dei numeri dispari.
Pertanto $a_{2016} = 2 \cdot 2016 - 1 = 4031$.

Problema 7 *Trovare tutti i polinomi $f(x)$ tali che*

$$xf(x-1) = (x+1)f(x).$$

<u>Soluzione</u>: Sostituiamo $x = 0$ e osserviamo che $f(0) = 0$. Dimostriamo per induzione che $f(x)$ ha infiniti zeri. Per ipotesi induttiva $f(n) = 0$, dimostriamo che $f(n+1) = 0$. Dall'equazione $(n+1)f(n+1-1) = (n+1)f(n) = (n+2)f(n+1)$, poiché $f(n) = 0$ banalmente $f(n+1) = 0$. Quindi $f(x)$ ha infinite radici, pertanto è un polinomio costante . Inoltre considerato che $f(0) = 0$, l'unica soluzione è $f(x) = 0$.

Problema 8 *Siano a,b numeri reali positivi. Dimostrare che*

$$\frac{a+b}{2}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq 2.$$

Soluzione: Innanzitutto per $AM-GM$ si ha

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq\frac{2}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{2}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}$$

Posto

$$x=\frac{a+b}{2}$$

si ha

$$x+\frac{1}{x}=\frac{(x^2-2x+1)+2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}+2\geq 2.$$

Problema 9 *Sia a_n una progressione aritmetica di numeri interi positivi tale che uno dei suoi termini sia un quadrato perfetto. Dimostrare che esistono infiniti quadrati perfetti che appartengono ad a_n.*

Soluzione: Sia $a_k=a^2$. Tutti i numeri del tipo a^2+nd, con n,d naturali, appartengono alla successione. Se scegliamo $n=2a+d$ otteniamo $a_{k+n}=a^2+2ad+d^2=(a+d)^2$. Ipotizziamo per assurdo che i quadrati siano un numero finito, allora esisterebbe un $a_m=l^2$ maggiore di ogni altro quadrato della successione. Ma con lo stesso procedimento di prima possiamo trovare $a_{m+2l+d}=(m+d)^2>l^2$. Assurdo, quindi la tesi è dimostrata.

Problema 10 *Siano a,b numeri reali positivi tali che*

$$a^{2014}+b^{2014}=a^{2016}+b^{2016}.$$

Dimostrare che $a^2+b^2\geq 2$.

Soluzione: Supponiamo senza perdit di generalit che $a\geq b$, allora le sequenze $(a^2;b^2)$ e $(a^{2014};b^{2014})$ sono entrambe decrescenti (in caso contrario sarebbero entrambe crescenti). Possiamo pertanto usare la disuguaglianza di Cebysev e ottenere

$$(a^2+b^2)(a^{2014}+b^{2014})\geq 2(a^2\cdot a^{2014}+b^2\cdot b^{2014})=2(a^{2016}+b^{2016})$$

Sfruttando l'ipotesi otteniamo

$$a^2 + b^2 \geq 2.$$

Problema 11 *La successione a_n è così definita:*

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 7 \quad a_{n+1} = 7a_n - 12a_{n-1}$$

Trovare una formula chiusa per

$$\sum_{i=0}^{n} a_i.$$

<u>Soluzione:</u> L'equazione caratteristica della successione è $a^2 - 7a + 12 = 0$ e le sue radici sono $x_1 = 3, x_2 = 4$. La soluzione generale è quindi $a_n = a3^n + b4^n$. Sostituendo $n = 0$ ed $n = 1$ si ricava $a = b = 1$, pertanto $a_n = 3^n + 4^n$. La somma diventa dunque:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} 3^i + \sum_{i=0}^{n} 4^i.$$

Infine tramite le formule delle serie geometriche:

$$\sum_{i=0}^{n} a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} + \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

Problema 12 *Si consideri l'insieme $N_{2016} = \{1, 2, \ldots, 2016\}$. Per ogni sottoinsieme non vuoto di N_{2016} si consideri il prodotto dei suoi elementi. Quanto vale la somma di questi prodotti?*

<u>Soluzione:</u> Si prende il polinomio

$$P(x) = (x + 1)(x + 2) \ldots (x + n) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Per le formule di Viète si ha

$$a_1 = 1+2+\ldots+n, \quad a_2 = 1\cdot2+1\cdot3+\ldots+(n-1)\cdot(n), \quad \ldots \quad , \quad a_n = 1\cdot2\cdots n$$

Sostituendo $x = 1$ e $n = 2016$ all'espressione precedente si ottiene la somma di tutti i prodotti per ogni scelta dei sottoinsiemi non vuoti di N_{2016} con l'aggiunta di 1. Pertanto la somma S dei prodotti cercati vale $S = (n+1)! - 1 = 2017! - 1$.

Problema 13 *Trovare le soluzioni reali di*

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$$

Soluzione: Ponendo $\sqrt[4]{x}=y$ e $\sqrt[4]{97-x}=z$ si ottiene che $y^4+z^4=x+97-x=97$. Sfruttando l'equazione iniziale si nota che $z+y=5, \quad y^4+z^4=97$. Imponendo $\sigma_1=y+z$ e $\sigma_2=yz$ risulta che

$$\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=97$$

Poiché $\sigma_1=5$ l'equazione diventa $\sigma_2^2-50\sigma_2+264=0$ le cui soluzioni sono $\sigma_2=6, \quad \sigma_2=44$. Si deve risolvere il sistema $y+z=5$, $yz=6$ che ha soluzioni $(y_1,z_1)=(2,3),(y_2,z_2)=(3,2)$. Pertanto $x_1=16, x_2=81$. Se $y+z=5$ e $yz=44$ i valori sono complessi.

Problema 14 *Sia x_n una successione così definita: $x_1=2, \quad x_{n+1}=\frac{x_n^4+9}{10x_n}$. Dimostrare che $\frac{4}{5}<x_n\leq\frac{5}{4} \qquad \forall n\geq 2$.*

Soluzione: Innanzitutto dimostriamo che la successione é sempre positiva per induzione. $x_1=2>0$ per ipotesi. Dimostriamo adesso che se x_n positivo anche x_{n+1} positivo. $x_{n+1}=\frac{x_n^4+9}{10x_n}$, $x_n^4+9>0$ sempre e $10x_n>0$ per ipotesi induttiva, pertanto per induzione la successione é sempre positiva.

$$x_{n+1}=\frac{x_n^4+9}{10x_n}=\frac{x_n^4}{10x_n}+\frac{3}{10x_n}+\frac{3}{10x_n}+\frac{3}{10x_n}\geq$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{x_n^4}{10x_n}\frac{3}{10x_n}\frac{3}{10x_n}\frac{3}{10x_n}}=4\frac{\sqrt[4]{27}}{10}>\frac{4}{5}$$

Dove si é usata la disuguaglianza AM-GM. Per la seconda disuguaglianza, osserviamo che $x_2=\frac{5}{4}$ e dimostriamo per induzione che $x_{n+1}\leq x_n$. Supponiamo $x_n\leq\frac{5}{4}$. Per la legge di definizione della successione dobbiamo provare che $x_n\geq\frac{x_n^4+9}{10x_n}$, cioé che $x_n^4-10x_n^2+9\leq 0$. La disuguaglianza soddisfatta per $1\leq x_n^2\leq 9$ e quindi per $x_n\leq\frac{5}{4}$ e quindi per induzione segue la tesi.

Problema 15 *Sia dato il polinomio*

$$p(x) = (x-a)^2(x-b)^2 + 1$$

dove a e b sono interi distinti. Dimostrare che $p(x)$ non può essere scomposto nel prodotto di due polinomi positivi a coefficienti interi.
Nota: un polinomio si dice positivo se assume valori positivi per ogni valore di x.

Soluzione: Supponiamo che esistano due polinomi positivi a coefficienti interi $k(x)$ e $q(x)$ tali che

$$(x-a)^2(x-b)^2 + 1 = k(x)q(x)$$

Allora, troviamo subito che $k(a)q(a) = k(b)q(b) = 1$ da cui segue che $k(a) = q(a) = k(b) = q(b) = 1$, in quanto i polinomi sono positivi. Di conseguenza, abbiamo che $k(x) - 1$ e $q(x) - 1$ sono divisibili per $(x-a)(x-b)$: possiamo assumere che

$$k(x) - 1 = (x-a)(x-b) \qquad q(x) - 1 = (x-a)(x-b)$$

in quanto $k(x)$ e $q(x)$ non possono avere grado superiore al secondo altrimenti il loro prodotto sarebbe un polinomio di grado superiore al quarto, che va contro l'ipotesi iniziale. Inoltre sono entrambi monici poiché il polinomio di partenza è monico e i coefficienti sono interi. Questo implica che

$$k(x)q(x) = [(x-a)(x-b) + 1]^2 = (x-a)^2(x-b)^2 + 1 + 2(x-a)(x-b)$$

Ma, poiché abbiamo supposto che $k(x)q(x) = p(x)$, allora deve essere

$$(x-a)(x-b) = 0$$

che è un assurdo.

Problema 16 *Dimostrare che se x, y, z sono reali maggiori o uguali a 1 tali che*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$$

si ha

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Soluzione: Scriviamo $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$ come $\sqrt{\frac{x-1}{x}}\sqrt{x}+\sqrt{\frac{y-1}{y}}\sqrt{y}+\sqrt{\frac{z-1}{z}}\sqrt{z}$ e utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz otteniamo

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \leq \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}}\right)\left(\sqrt{x+y+z}\right).$$

Ma delle ipotesi sappiamo che

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1.$$

Da qui la tesi.

Problema 17 *Siano a, b, c, d numeri reali positivi tali che:*

$$a+b+c+d=28.$$

Dimostrare che

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd} \geq \frac{6}{49}.$$

Soluzione: Dalla disuguaglianza $HM-AM$ otteniamo:

$$\frac{6}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}} \leq \frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}$$

e quindi:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd} \geq \frac{36}{ab+ac+ad+bc+bd+cd} \qquad (1)$$

A questo punto notiamo che

$$ab+ac+ad+bc+bc+cd=\frac{(a+b+c+d)^2-a^2-b^2-c^2-d^2}{2} \qquad (2).$$

Sfruttando la disuguaglianza $QM - AM$, ricaviamo che

$$\frac{(a+b+c+d)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{2} \geq$$

$$\geq \frac{(a+b+c+d)^2 - \frac{(a+b+c+d)^2}{4}}{2} = \frac{28^2 \cdot 3}{8} \qquad (3)$$

Usando la (3) e la (2) nella (1), otteniamo:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd} \geq \frac{6}{7^2}$$

cioè la tesi.

Problema 18 *Sia $p(x)$ un polinomio di grado n, tale che $p(k) = k/(k+1)$ per $k = 0, 1, \ldots, n$. Trovare $p(n+1)$.*

Soluzione: Consideriamo il polinomio $q(x) = (x+1)p(x) - x$, che si annulla per $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Allora

$$(x+1)p(x) - x = ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

Per determinare a poniamo $x = -1$ in quest'ultima espressione, ottenendo $1 = a(-1)^{n+1}(n+1)!$, ovvero

$$a = \frac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}$$

Allora abbiamo che

$$p(x) = \frac{x}{x+1}\left[\frac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n) + 1\right]$$

Distinguendo i casi in cui n è pari e quelli in cui n è dispari arriviamo alla soluzione

$$p(n+1) = \begin{cases} 1 & n \text{ } pari \\ n/(n+2) & n \text{ } dispari \end{cases} .$$

Problema 19 *Dimostrare che per ogni n-upla $a_1, \dots a_n$ di numeri reali positivi vale la seguente disuguaglianza:*

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\left(1+\frac{a_k}{k^2}\right) \geq (n+1)^2.$$

Soluzione: Il termine generale della produttoria è

$$p_k = 1 + \frac{1}{a_k} + \frac{a_k}{k^2} + \frac{1}{k^2}.$$

Dalla disuguaglianza $AM - GM$ applicata al secondo e al terzo addendo otteniamo che

$$\frac{1}{a_k} + \frac{a_k}{k^2} \geq \frac{2}{k}$$

Pertanto

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)\left(1+\frac{a_k}{k^2}\right) \geq \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = (n+1)^2.$$