II Stage Olimpiadi SSC - Gara finale

Problema 1 *Sia $p(x)$ un polinomio monico di grado n che ammette n radici reali. Le n radici sono in progressione geometrica di ragione k. Sapendo che $p(0) = m$, $p(1) = 0$ e che $x_1 = a > 0$ è la più piccola delle radici, dimostrare che*

$$|m| \leq k^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

(Nota: con $|a|$ si indica il valore assoluto di a, ovvero il numero a privato del segno)

<u>Soluzione</u>: Si nota innanzitutto che 1 è radice del polinomio, quindi $x_i = 1$ per un certo $1 \leq i \leq n$. Ciò significa che $a \leq 1$ in quanto $x_1 = a$ è la più piccola delle radici. Se $n = 1$, il polinomio è $p(x) = x - 1$; dunque la disuguaglianza è banalmente verificata perché $m = 1$ e $k^{(n(n-1)/2)} = k^0 = 1$. Supponiamo $n \geq 2$. Deve essere necessariamente $k \geq 1$, altrimenti $a \cdot k < a$, e ciò va contro la condizione di minimalità di a. Quindi tutte le radici sono positive e per le formule di Viète

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = a \cdot ak \cdot ak^2 \cdots ak^{n-1} = a^n \cdot k^{\frac{n(n-1)}{2}} = |m|.$$

Nella penultima disuguaglianza è stato sfruttato il fatto che gli x_i sono in progressione geometrica. Infine poiché $0 < a \leq 1$ allora il massimo di $|m|$ si ottiene per $a = 1$, ovvero il massimo di a che si ottiene quando 1 è la radice più piccola.

Problema 2 *Nel suo laboratorio in Via Vivaldisannoia, il professor Petri sta studiando un nuovo tipo di batterio, lo StafiloSCiocco.*
Uno stafilosciocco può essere fertile *o* infertile. *Ogni giorno, esattamente alla stessa ora (quando il professore inietta una soluzione di acqua, zucchero e polpette), ogni stafilosciocco fertile genera* 4 *stafilosciocchi infertili (mentre esso stesso rimane fertile); invece, ogni stafilosciocco infertile genera uno stafilosciocco infertile, ma esso diventa fertile grazie alle nutrienti polpette zuccherate.*
Sapendo che al giorno 1 *vi sono esattamente* 2 *stafilosciocchi, uno fertile e uno infertile, dimostrare che al giorno n vi sono esattamente* $\dfrac{3^{n+1}+(-1)^n}{4}$ *stafilosciocchi.*

Soluzione: Sia $f(n) = \dfrac{3^{n+1}+(-1)^n}{4}$. Sappiamo che al giorno 1 vi sono $f(1) = 2$ stafilosciocchi (di cui $f(0) = 1$ fertile). Dimostriamo per induzione che al giorno $n \geq 1$ vi sono $f(n)$ stafilosciocchi, di cui $f(n-1)$ fertili. Il caso base $n = 1$ è vero, come visto sopra. Supponiamo che la tesi sia vera per n e dimostriamola per $n+1$. Per ipotesi induttiva, al giorno n vi sono $f(n-1)$ stafilococchi fertili e $f(n)-f(n-1)$ infertili. Dunque, gli $f(n-1)$ stafilococchi fertili genereranno $4f(n-1)$ nuovi stafilococchi infertili, rimanendo essi stessi fertili; invece, gli $f(n) - f(n-1)$ stafilococchi infertili genereranno $f(n) - f(n-1)$ nuovi stafilococchi infertili, ma essi si trasformano in stafilococchi fertili. Dunque il numero totale di stafilosciocchi al giorno $n+1$ è:

$$\begin{aligned}
&f(n-1) + 4f(n-1) + 2(f(n) - f(n-1)) \\
&= 2f(n) + 3f(n-1) \\
&= 2\frac{3^{n+1}+(-1)^n}{4} + 3\frac{3^n+(-1)^{n-1}}{4} \\
&= \frac{6 \cdot 3^n + 2 \cdot (-1)^n}{4} + \frac{3 \cdot 3^n - 3 \cdot (-1)^n}{4} \\
&= \frac{9 \cdot 3^n - \cdot (-1)^n}{4} \\
&= \frac{3^{n+2}+(-1)^{n+1}}{4} \\
&= f(n+1)
\end{aligned}$$

Tra questi $f(n+1)$ stafilosciocchi, in base a quanto visto sopra, il numero di quelli fertili è $f(n-1)$ (che erano già fertili), sommato a $f(n) - f(n-1)$, per un totale di $f(n)$. Ciò conclude la dimostrazione.

Soluzione 2: Sia $I(n)$ il numero di stafilosciocchi infertili al giorno n, sia $F(n)$ il numero di quelli fertili e sia $T(n) = F(n) + I(n)$ il totale. Allora $F(1) = I(1) = 1$, $T(1) = 2$, e dal testo del problema sappiamo che:

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + I(n) = T(n) \\ I(n+1) &= 4F(n) + I(n) \end{aligned}$$

A questo punto, osserviamo che:

$$\begin{aligned} T(n+2) &= F(n+2) + I(n+2) \\ &= (F(n+1+I(n+1)) + (4F(n+1) + I(n+1)) \\ &= T(n+1) + (F(n+1) + I(n+1)) + 3F(n+1) \\ &= T(n+1) + T(n+1) + 3(F(n) + I(n)) \\ &= 2T(n+1) + 3T(n) \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo dimostrato che $T(n+2) = 2T(n+1) + 3T(n)$ per ogni $n \geq 0$, da cui deduciamo che $T(n) = ax_1^n + bx_2^n$, per qualche a e b, dove x_1 e x_2 sono le radici dell'equazione $x^2 = 2x + 3$. Risolvendo l'equazione, otteniamo $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$. Poiché $T(1) = 2$ e si verifica facilmente che $T(2) = 7$, deve essere $3a - b = 2$ e $9a + b = 7$, da cui si ottiene $a = 3/4$ e $b = 1/4$. Ciò conclude la dimostrazione.

Si osservi che questa dimostrazione, a differenza della precedente, non richiede di conoscere in anticipo la formula per $T(n)$!

Problema 3 *Si consideri la seguente equazione, con x, y, n interi e $n \geq 1$:*

$$x^3 + y^3 + 12 = n!$$

(Nota: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)

a) Trovare tutte le soluzioni tali che $n > 5$.

b) Trovare tutte le soluzioni.

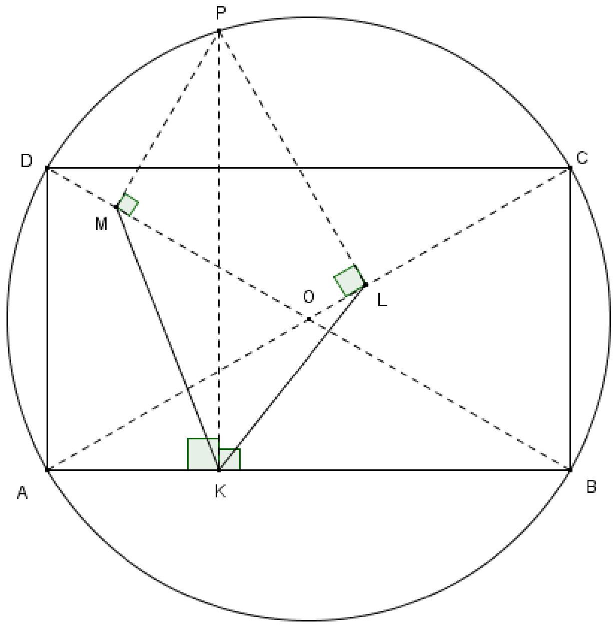
Soluzione:

a) I residui cubici modulo 9 sono solo $0, \pm 1$ e quindi $x^3 + y^3 \equiv 0, \pm 1$ o $\pm 2 \pmod 9$; inoltre $12 \equiv 3 \pmod 9$. Di conseguenza, $x^3 + y^3 + 12$ non è mai divisibile per 9. Ma se $n \geq 6$, ovviamente $n!$ è divisibile per 9, e quindi l'equazione non ha soluzione.

b) Per $n = 3, 4$ otteniamo che $n! - 12$ è congruo a 3 modulo 9. Utilizzando lo stesso ragionamento di prima con i residui cubici modulo 9, l'equazione risulta impossibile.
Per $n = 1, 2, 5$ si verifica facilmente che $n! - 12$ è congruo a 3 oppure 4 $\pmod 7$. Inoltre, poiché i residui cubici modulo 7 sono anch'essi solamente $0, \pm 1$, segue che $x^3 + y^3 \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod 7$, e quindi anche in questi casi l'equazione è impossibile.

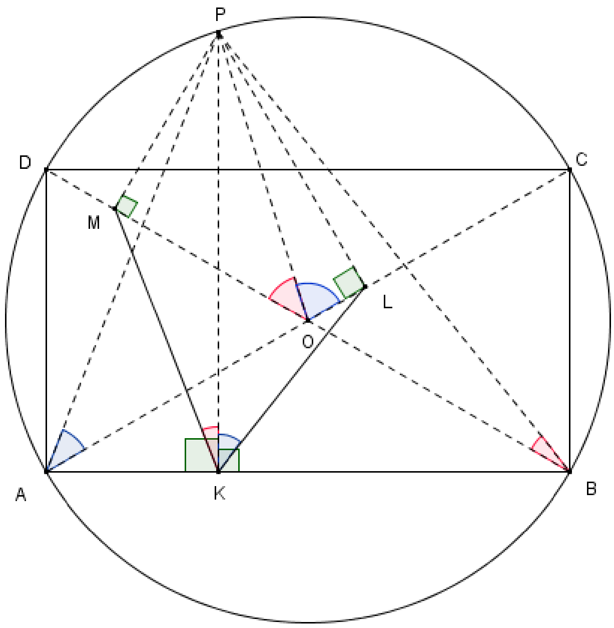
In definitiva, non esistono soluzioni dell'equazione data.

Problema 4 *Sia $ABCD$ un rettangolo inscritto in una circonferenza di centro O. Sia P un punto appartenente al più piccolo dei due archi di circonferenza di estremi CD, e siano K, L, M le proiezioni di P su AB, AC, BD, rispettivamente. Dimostrare che $L\widehat{K}M = 45°$ se e solo se $ABCD$ è un quadrato.*



Soluzione:

Consideriamo $A\widehat{L}P$ e $A\widehat{K}P$: essi sono angoli congruenti che sottendono la stessa corda, e dunque A, K, L, P appartengono alla stessa circonferenza. Analogamente si mostra che il quadrilatero $BKMP$ è ciclico. L'angolo $L\widehat{K}M$ può essere scritto come somma di $M\widehat{K}P$ e $P\widehat{K}L$, ma, poiché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, $M\widehat{K}P = M\widehat{B}P$ e $P\widehat{K}L = P\widehat{A}L$. Consideriamo ora la circonferenza di centro O. Gli angoli $C\widehat{O}P$ e $P\widehat{O}D$ sono gli angoli al centro corrispondenti agli angoli $C\widehat{A}P$ e $P\widehat{B}D$, rispettivamente. Si ha dunque che $C\widehat{O}P + P\widehat{O}D = 2(C\widehat{A}P + P\widehat{B}D) = 2(P\widehat{K}L + P\widehat{K}M)$, ovvero $D\widehat{O}C = 2L\widehat{K}M$ e dunque $L\widehat{K}M = 45°$ se e solo se $D\widehat{O}C$ è retto, ovvero se e solo se $ABCD$ è un quadrato.



Problema 5 *Alberto e Barbara giocano su una scacchiera* 2016×2016*, inizialmente vuota.*
Ad ogni turno, iniziando da Alberto, un giocatore posiziona uno stuzzicadenti su un lato di una casella della scacchiera. Vince il primo giocatore che, poggiando uno stuzzicadenti, ottiene una figura chiusa (ovvero un insieme di stuzzicadenti che forma un poligono).
Dimostrare che Barbara ha sempre una strategia vincente.

Soluzione: La strategia grazie alla quale Barbara può garantirsi la vittoria sfrutta le simmetrie del problema. In primo luogo osserviamo che ad ogni mossa il numero di lati disponibili diminuisce strettamente. Dunque essendo inizialmente un numero finito di lati, precisamente $2 \times 2016 \times 2017$ allora il gioco finisce. Dunque ogni strategia non perdente è vincente.

La strategia che Barbara attua per non perdere è la seguente: dopo ogni mossa di Alberto, se Barbara ha una mossa vincente, la gioca; altrimenti Barbara occupa il lato simmetrico rispetto al centro della scacchiera. Per mostrare che questa strategia è non perdente dimostriamo che Alberto non può vincere.
Osserviamo che vale il seguente invariante: fin quando il gioco non è finito, quando Alberto deve muovere, gli stuzzicadenti posizionati sono simmetrici rispetto al centro della scacchiera.

Supponiamo per assurdo che Alberto vinca, e siano a lo stuzzicadente che ha aggiunto per ultimo, F la figura chiusa che ha ottenuto con l'ultima mossa, e $\bar{F} = F \setminus \{a\}$ la figura aperta prima dell'ultima mossa.

Se F è simmetrica rispetto al centro, allora esiste uno stuzzicadenti a' che è il simmetrico dello stuzzicadenti messo da Alberto. Ma allora, prima della mossa di Alberto, a' non era il simmetrico di nessuno, e ciò è assurdo perché contraddice l'invariante.

Se invece F non è simmetrica rispetto al centro della scacchiera, consideriamo la mossa b che ha fatto Barbara per consegnare ad Alberto tale situazione. Barbara non ha vinto, quindi deve aver giocato una mossa che rendeva simmetrico il sistema. Sia $\bar{F}'$ la figura simmetrica a $\bar{F}$.
Distinguiamo due casi:

a) Se $b \notin \bar{F}$, allora Barbara avrebbe potuto posizionare lo stuzzicadente a' simmetrico di a che permette di chiudere $\bar{F}'$, e ciò è assurdo.

b) Se $b \in \bar{F}$, allora il simmetrico b' di b fa parte di $\bar{F}'$; ma allora, di nuovo, Barbara avrebbe potuto giocare a' simmetricamente ad a e chiudere $\bar{F}'$, assurdo.

La contraddizione nasce dall'aver supposto la vittoria di Alberto. Di conseguenza, Barbara vince sempre.