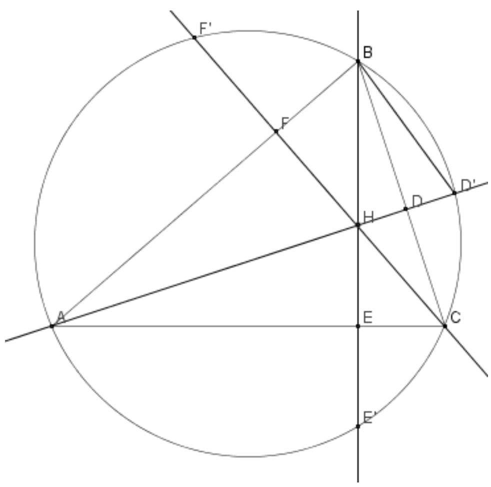
Lezione 4 - Geometria

Problema 1 *In un triangolo ABC, siano D, E e F i piedi delle altezze da A, B e C rispettivamente. Siano D', E' e F' le altre intersezioni delle rette AD, BE e CF con la circonferenza circoscritta ad ABC. Dimostrare che i triangoli DEF e $D'E'F'$ sono simili.*

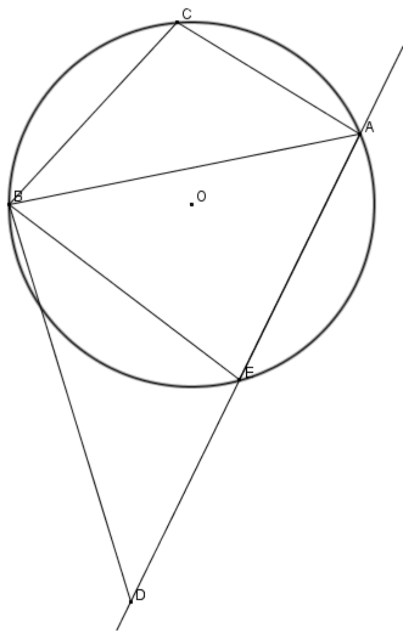
Soluzione:



$C\widehat{A}D \cong C\widehat{B}D'$ perché angoli alla circonferenza insistenti sullo stesso arco $D'C$ mentre si ha $C\widehat{B}E \cong C\widehat{A}D$ perché angoli acuti rispettivamente dei triangoli rettangoli CBE e ADC aventi in comune l'angolo $A\widehat{C}B$, da questo segue $C\widehat{A}D \cong C\widehat{B}D' \cong C\widehat{B}E$. Detto H l'ortocentro del triangolo ABC si ha che i triangoli rettangoli BDH e BDD' sono simili avendo due angoli congruenti, da cui segue che $DH \cong DD'$. Similmente, considerando prima i triangoli CEE' e CEH e poi AFF' e AFH si dimostra che $EH \cong EE$ e $FH \cong FF'$ da cui segue che $DE \parallel D'E'$,$EF \parallel E'F'$,$FD \parallel F'D'$ (Corollario Teorema di Talete applicato ai triangoli $HE'D'$,$HE'F'$,$HF'D'$). Da ciò si ha $DEF \sim D'E'F'$.

Problema 2 *Sia $AEBC$ un quadrilatero ciclico. Sia D un punto sulla retta AE che sta al di fuori della circonferenza circoscritta ad $AEBC$. Si supponga che $C\widehat{A}B \cong B\widehat{A}E$. Provare che $AB \cong BD$ se e solo se $DE \cong AC$.*

Soluzione: Questo esercizio si compone di due condizioni, una necessaria



e l'altra sufficiente. Dimostriamo la prima:

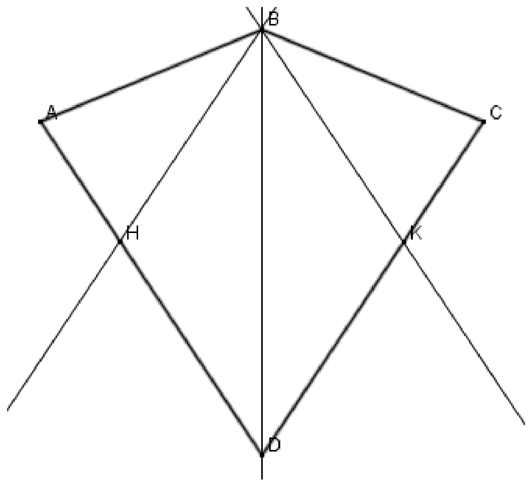
$\Longrightarrow$ Sappiamo che il quadrilatero $AEBC$ è ciclico e che $BAC \cong BAE$ da cui si conclude che $CB \cong EB$ (si usano relazioni tra angoli,archi, corde di una circonferenza). Inoltre $ACB\ congBED$ (angoli supplementari stesso angolo BAE),quindi i triangoli ABC e BDE sono congruenti per primo criterio e da ciò segue che $AB \cong BD$.

Dimostriamo la parte sufficiente:

$\Longleftarrow$ Come prima si ha che $CB \cong EB$ e $BAD \cong BDA$ perché il triangolo ABD è isoscele, da cui segue che $EBD \cong ABC$ perché supplementari a somme di angoli congruenti (basta considerare i triangoli DBE e ABC). Si ha quindi che i triangoli ABC e BDE sono congruenti per il primo criterio e da ciò segue che $DE \cong AC$.

Problema 3 *Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso con $CBD \cong 2ADB$, $ABD \cong 2CDB$ e $AB \cong CB$. Provare che $AD \cong CD$.*

Soluzione: Sia BK la bisettrice dell'angolo DBC e BH la bisettrice di



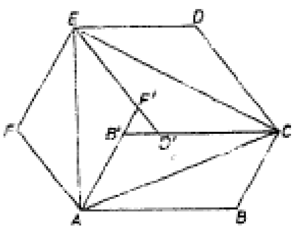
DBA. Si ha, applicando il primo teorema della bisettrice ai triangoli ABD e BDC:

$$\left(\frac{AB}{BD} = \frac{AH}{DH} \wedge \frac{BC}{BD} = \frac{CK}{DK}\right) \Rightarrow \frac{DH}{DK} = \frac{AH}{CK}$$

Inoltre $BKD \cong DHB$ per il secondo criterio di congruenza da cui segue $BH \cong KD$ e$BK \cong DH$ per cui si avrà $\frac{DH}{DK} = \frac{BK}{BH}$ e $\frac{BK}{BH} = \frac{AH}{CK}$. Quindi i triangoli BKC e BHA sono simili, ma per ipotesi $AC \cong BC$, così si deve avere che $BKC \cong BHA$ e $HBA \cong KBC$, da cui segue che $BDA \cong BDC$ e $ABD \cong DBC$. Dalla congruenza dei triangoli ABC e DBC (per il secondo criterio) segue la tesi.

Problema 4 *Un esagono convesso $ABC'DEE$ ha le tre coppie di lati opposti paralleli. Se l'esagono ha un'area doppia di quella del triangolo ACE si dimostri che allora i lati opposti hanno la stessa lunghezza. Provare che $AD \cong CD$.*

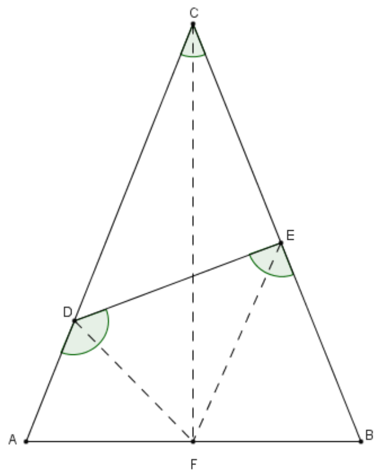
Soluzione: Si traccino dai vertici A, C, E delle linee parallele ai lati



EF, AB, e AF, rispettivamente. Per la convessità dell'esagono le intersezioni di tali linee sono all'interno del triangolo ACE. Si chiamino questi punti B', D' e F', come in figura. Poiché le linee sono parallele ai lati, si ha che le aree dei triangoli AEF', ACB' e CED' sono rispettivamente la metà di quelle dei parallelogrammi $AFEF', CDED'$ e $ABCB'$. L'ipotesi che l'esagono $ABCDEF$ abbia area doppia di quella del triangolo ACE implica allora che il triangolo $B'D'F'$ è degenere (deve avere area nulla), cioè che i tre i punti B', D' e F' coincidono. Segue allora che $EF \cong AF' \cong AB' \cong BC$ che è la tesi (per gli altri lati si procede analogamente).

Problema 5 *Sia ABC un triangolo isoscele di vertice C. Siano D ed E due punti appartenenti ad AC e BC, rispettivamente, tali che le bisettrici degli angoli $D\widehat{E}B$ e $A\widehat{D}E$ si intersechino in F, punto appartenente ad AB. Dimostrare che F è il punto medio di AB.*

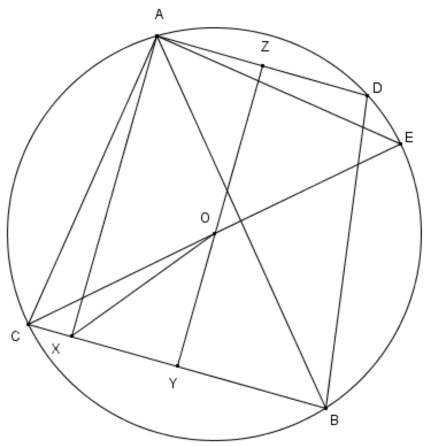
<u>Soluzione</u>:



Le bisettrici degli angoli $D\widehat{E}B$ e $A\widehat{D}E$ sono bisettrici esterne del triangolo CDE. Esse sono concorrenti con la bisettrice interna per C. Poiché ABC è isoscele in C, la bisettrice interna per C è anche mediana, e dunque il punto di intersezione F tra le tre bisettrici è il punto medio di AB.

Problema 6 *Sia ABC un triangolo acutangolo. Sia X il piede dell'altezza relativa al vertice A e O il circocentro di ABC. Si supponga che $A\widehat{C}B \geq C\widehat{B}A + 30°$. Dimostrare che $B\widehat{A}C + C\widehat{O}P < 90°$.*

<u>Soluzione</u>:



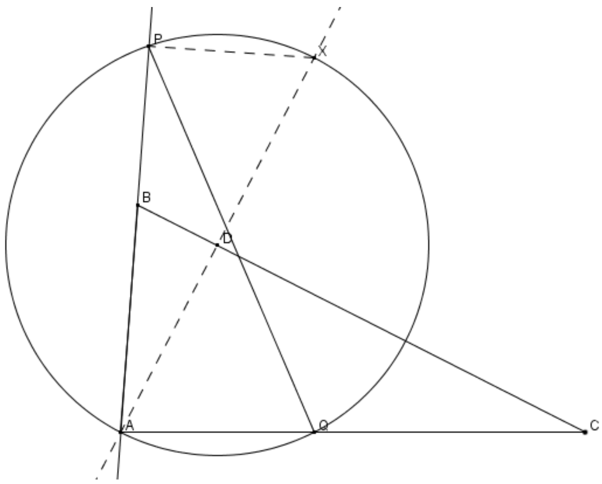
Sia D un punto appartenente alla circonferenza circoscritta, tale che $AD \parallel BC$. Notiamo che $C\widehat{B}D \cong B\widehat{C}A$, e che dunque $A\widehat{B}D \geq 30°$. Segue che $A\widehat{O}D \geq 60°$. Sia Z il punto medio di AD e Y il punto medio di BC. Si ha che $AZ \geq R/2$, con R pari al raggio della circonferenza. Inoltre, poiché $AZYX$ è un rettangolo, $AZ \cong YX$. Notiamo che O non può coincidere con Y, altrimenti ABC sarebbe un triangolo rettangolo. Dunque $OX > YX \geq R/2$. Ma $XC = YC - YX < R - YX \leq R/2$, il che implica $OX > XC$. Si ha dunque $C\widehat{O}X < O\widehat{C}X$. Sia CE un diametro. Si ha $O\widehat{C}X \cong E\widehat{C}B$. Ma $E\widehat{C}B \cong E\widehat{A}B$ e $E\widehat{A}B + B\widehat{A}C \cong E\widehat{A}C \cong 90°$. Ciò implica $C\widehat{O}X + B\widehat{A}C < 90°$.

Problema 7 *Nel triangolo ABC sia D il piede dell'altezza relativa al lato BC. Considerata la circonferenza di centro D e raggio AD, siano P e Q le sue intersezioni rispettivamente con le rette AB e AC. Dimostrare che $AQP \sim ABC$.*

Soluzione:

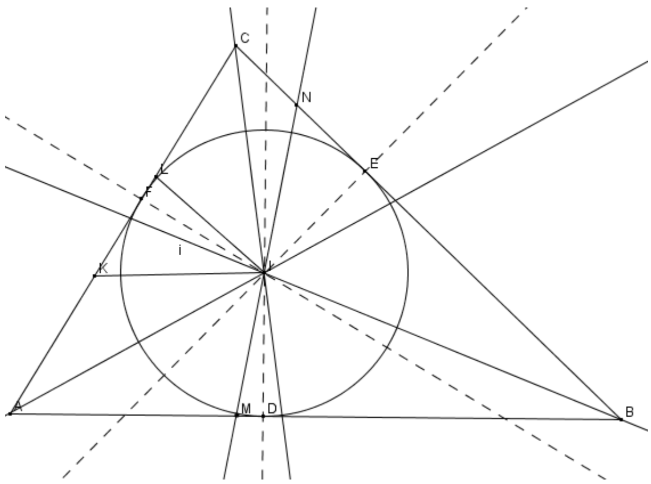
Sia AX il diametro della circonferenza. Si ha $AQP \cong AXP$, $QAX \cong QPX$ perché insistono sugli archi AP e QX , $APX \cong ADC$ perché entrambi angoli retti (APX insiste su un diametro). $APQ \cong ACB$ perché complementari degli angoli QAX e QPX, tra loro congruenti. Da ciò segue la similitudine tra i triangoli ABC e AQP, in quanto essi hanno anche l'angolo in A in comune.

Problema 8 *Dato il triangolo ABC e il suo incentro I, si tracci una retta passante per I che incontra i lati AB e BC nei punti M ed N rispettivamente.*



Il triangolo BMN è acuto.I punti K e L sul lato AC sono tali che $ILA \cong IMB$ e $IKC \cong INB$. Provare che $AM + KL + CN \cong AC$.

<u>Soluzione</u>: Tracciamo la circonferenza iscritta nel triangolo ABC e siano

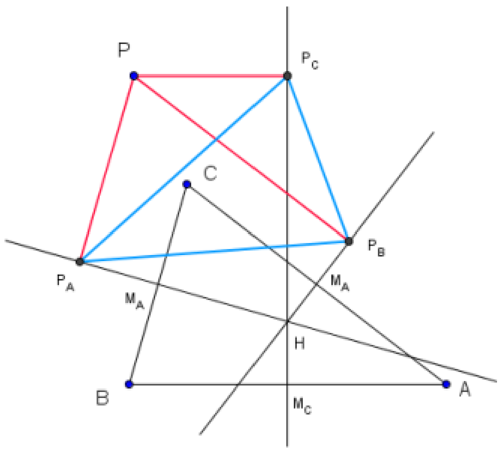


D, E e F i punti di tangenza della circonferenza con i lati AB, BC e AC rispettivamente. I triangoli IDM e IFL sono congruenti perché sono rettangoli, $FLI \cong IMD$ per ipotesi e $IF \cong ID$ perché raggi della circonferenza iscritta, da cui segue che $MD \cong FL$. Analogamente considerando i triangoli KFI e INE, si deduce che $KF \cong NE$.

Applicando il teorema delle tangenti alla circonferenza iscritta ad ABC si ottiene che $AF \cong AD$, $FC \cong CE$. Abbiamo che: $AC \cong AF + FC \cong AD + CE \cong AM + MD + CN + NE \cong AM + FL + CN + KF \cong AM + KL + CN$.

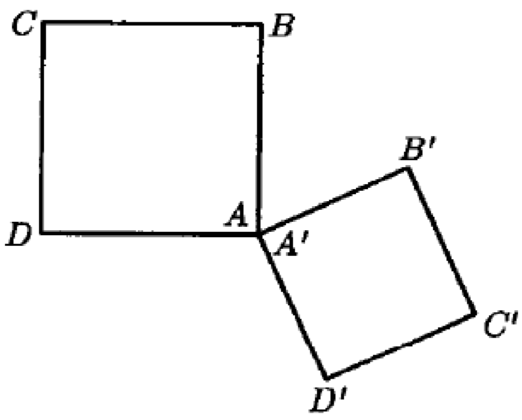
Problema 9 *Sia ABC un triangolo e P un punto del piano. Chiamiamo P_A , P_B , P_C le proiezioni di P rispettivamente sui tre assi del triangolo. Si dimostri che il triangolo $P_AP_BP_C$ è simile al triangolo ABC. (Si consideri per semplicità solo il caso in cui il punto P giace nell'angolo M_AHM_B,essendo M_A,M_B i punti medi dei lati BC e AC e H il punto di intersezione degli assi.)*

<u>Soluzione</u>:

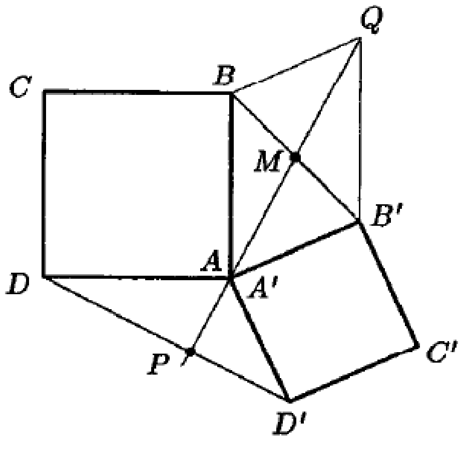


Sia T nella costruzione un punto appartenente al prolungamento della retta di P_PA tale che $PT <P_AT$. I triangoli PHP_B ,PHP_C sono inscrivibili in una circonferenza di diametro PH, dunque il quadrilatero PP_CP_BH è inscrivibile. Notiamo per che anche il quadrilatero PP_BHP_A inscrivibile, in quanto $PP_BH \cong PP_AH \cong \frac{\pi}{2}$ per ipotesi. Poiché per 3 punti passa una sola circonferenza, P,P_C ,P_B , H, P_A appartengono alla stessa circonferenza. Per ipotesi $PP_C \perp P_CM_C$,$P_CM_C \perp AB \rightarrow PP_C \parallel AB$. Allo stesso modo si dimostra $PP_B \parallel AC, PP_A \parallel BC$. Considerando i parallelismi due a due abbiamo: $PP_A \parallel BC, PP_B \parallel AC \Rightarrow P_APP_B \cong BCA$; da $PP_B \parallel AC, PP_C \parallel AB \Rightarrow P_CPP_B \cong CAB$; da $PP_C \parallel AB, PP_A \parallel B \Rightarrow P_CPT \cong CBA$. Andiamo quindi a considerare gli angoli uguali, sfruttando la ciclicità di $P_CPP_AHP_B$ da cui otteniamo $P_AP_CP_B \cong P_APP_B \cong BCA, P_CP_AP_B \cong P_CPP_B \cong CAB$, $P_CP_BP_A \cong \pi - P_CPP_A \cong TPP_C \cong CBA$. Avendo tre angoli congruenti (ne bastavano due ordinati), $P_AP_BP_C$ è simile a ABC.

Problema 10 *Nel piano due quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$ sono disposti come in figura. Si dimostri che la retta passante per A e perpendicolare a DD' incontra il segmento BB' nel punto medio.*



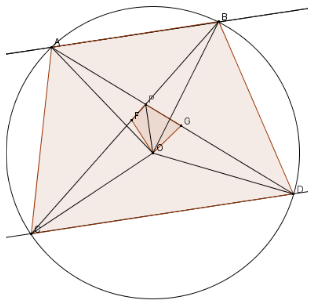
Soluzione: Disegniamo la retta parallela ad AB passante per B' e sia Q il punto in cui essa interseca la perpendicolare AP a DD', come in figura. Si



considerino i triangoli ADD' e $B'AQ$. Si ha $QAB' \cong D'A$ perché entrambi gli angoli sono complementari a PAD' ($D'AB'$ è retto e APD' è un triangolo rettangolo). Dato che per costruzione $B'Q$ è parallelo ad AB, l'angolo AQB' è uguale a BAQ, e questo a sua volta è uguale a $D'DA$ perché sono entrambi complementari a PAD. I triangoli ADD' e $B'AQ$ hanno quindi tutti gli angoli uguali e, avendo uguale anche un lato ($AD' \cong AB'$) , sono tra loro uguali. Pertanto $B'Q \cong AD \cong AB$; ne segue che il quadrilatero $ABQB'$ è un parallelogramma e dunque la diagonale AQ biseca l'altra diagonale BB'.

Problema 11 *Sia $ABCD$ un trapezio con basi AB e CD, inscritto in una circonferenza di centro O. Sia P l'intersezione delle rette BC e AD. Una* *circonferenza passante per O e P interseca i segmenti BC e AD nei punti F e G, rispettivamente. Mostrare che $BF \cong DG$.*

Soluzione:



Il quadrilatero $OGPF$ è ciclico, quindi $OGD \cong \pi - OGP \cong OFB$. Inoltre, $OB \cong OC \cong OD \cong OA$ perché raggi di una stessa circonferenza e $AD \cong BC$ perché il trapezio $ABCD$ è isoscele (basta dire che gli angoli alla base sono uguali,sfruttando il parallelismo tra AB e CD e il fatto che $ABCD$ è ciclico), così $OBC \cong ODA$, e $OBC \cong ODG$. Pertanto, $OBF \sim ODG$ e da $OB \cong OD$ segue che $OBF \cong ODG$ da cui $BF \cong DG$.

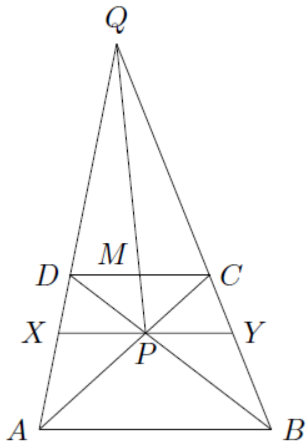
Problema 12 *Sia $ABCD$ un trapezio che non sia un parallelogramma. Siano P il punto di incontro delle diagonali e Q il punto di intersezione dei prolungamenti dei lati obliqui.*

(a) Si tracci la parallela alle basi passante per P e siano X e Y i punti di incontro di essa con i lati obliqui: si dimostri che $XP \cong PY$.

(b) Si dimostri che la retta PQ interseca la base minore nel suo punto medio.

Soluzione:

(a) Supponiamo che CD sia la base minore del trapezio, che X sia su AD e Y su BC, come in figura. Poiché le rette AB,XY,DC sono parallele, per il teorema di Talete si ha la proporzione $DC : DA = CY : YB$, e dunque $DC : (DX + XA) = CY : (CY + CB)$, ovvero $DX : XA = CY : YB$. Si osservi ora che i triangoli ABD e XPD sono simili, poiché XP è parallelo ad AB (dunque $DXP \cong DAB$ e $DPX \cong DBA$); ne deriva la proporzione fra lati corrispondenti $XP : AB = DX : DA$. Allo stesso modo, il triangolo ABC è simile al triangolo PYC (PY è parallelo ad AB, gli angoli corrispondenti che si formano sono congruenti), e vale la proporzione $PY : AB = CY : CB$.

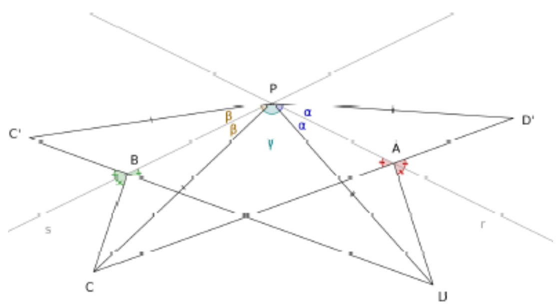


Combinando le proporzioni scritte sinora, $XP : AB = DX : DA = CY : CB = PY : AB$,e dunque $XP \cong PY$, come volevasi dimostrare.

(b) Sia M il punto di intersezione tra QP e la base minore. Per il parallelismo tra DC e XY abbiamo, alla maniera della dimostrazione precedente, la similitudine tra il triangolo QDM ed il triangolo QXP, come pure tra i triangoli QMC e QPY. Ne ricaviamo le proporzioni $DM : MQ = XP : XQ$; poiché per il punto (a) $XP \cong YP$, se ne ricava $DM : MQ = CM : MQ$, e dunque infine $DM \cong CM$ (M è il punto medio di DC).

Problema 13 *Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso. Sia P l'intersezione delle bisettrici esterne di DAC e di DBC. Dimostrare che $APD \cong BPC$ se e solo se $AD + AC \cong BC + BD$. [Nota: si ricorda che la bisettrice esterna ad un angolo è la retta passante per il vertice dell'angolo e perpendicolare alla bisettrice interna (cioè l'usuale bisettrice) dell'angolo stesso.]*

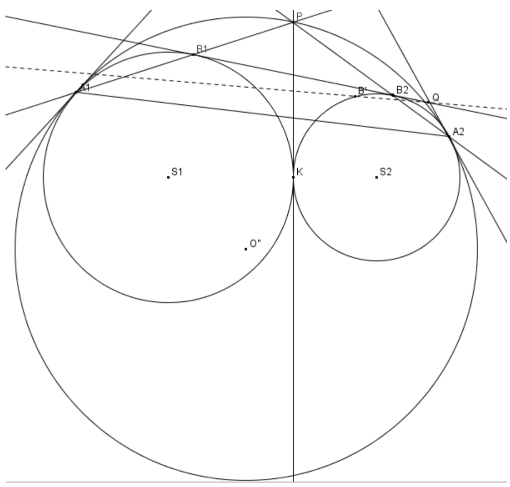
Soluzione:



Chiamiamo r ed s rispettivamente le bisettrici esterne di DAC e DBC. Si costruiscano i punti C' e D' rispettivamente come simmetrici di C rispetto ad s e come simmetrico di D rispetto ad r. Poiché r è bisettrice esterna si ha che C', B e D sono allineati e in più per costruzione $C'B \cong CB$; quindi $C'D \cong C'B + BD \cong BC + BD$. Allo stesso modo $D'C \cong AD + AC$. Chiamiamo ora $\beta \cong BPC$ che è congruente per costruzione a BPC' e nello stesso modo $\alpha \cong APD \cong APD'$. Chiamiamo infine $\gamma \cong CPD$. Consideriamo ora i triangoli $C'PD$ e CPD'. Abbiamo per costruzione $PD' \cong PD$ e $PC' \cong PC$; pertanto i due triangoli sono congruenti se e solo se i due angoli in P sono congruenti o, equivalentemente, se e solo se il terzo lato è congruente. Ma la prima condizione dice che $C'PD \cong 2\beta + \gamma \cong 2\alpha + \gamma \cong CPD'$ che equivale ad $\alpha \cong \beta$, mentre la seconda condizione dice che $CD' \cong C'D$ che, per quanto dimostrato sopra, equivale a $AD + AC \cong BC + BD$.

Problema 14 *Due circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono tangenti esternamente in un punto K. Le due circonferenze sono anche tangenti internamente alla circonferenza Γ nei punti A_1 e A_2, rispettivamente. Sia P uno dei punti di intersezione di Γ con la tangente comune di Γ_1 e Γ_2 in K. La retta PA_1 interseca Γ_1 in B_1 mentre la retta PA_2 interseca Γ_2 in B_2. Dimostrare che B_1B_2 è tangente comune delle circonferenze Γ_1 e Γ_2.*

Soluzione:

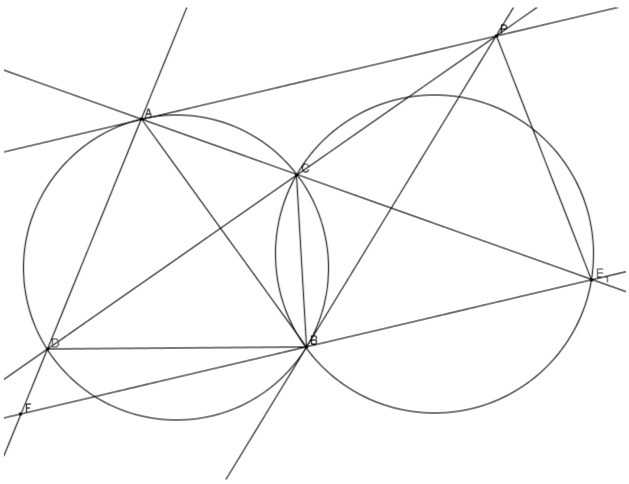


Sia Q il punto di intersezione tra B_1B_2 e la retta tangente in A_2 a Γ_2. Inoltre, sia B' il punto di intersezione fra le circonferenza Γ_2 e la retta ad essa tangente condotta da Q, così che $B' \neq A_2$. Si ha $PB_1 \cdot PA_1 = PK^2 = PB_2 \cdot PA_2$, da cui segue che $A_1A_2B_2B_1$ è ciclico. Valgono quindi le relazioni

$B_2A_2Q \cong A_2A_1P \cong B_1B_2P \cong B_2A_2Q$ e quindi $A_2Q \cong B_2Q$. Dato che $B'Q$ e QA_2 sono tangenti comuni alla stessa circonferenza si ha $B'Q \cong QA_2 \cong B_2Q$, da cui segue che la circonferenza di raggio QA_2 e entro Q interseca Γ_2 in A_2, B' e B_2. Se questi tre punti fossero fra loro distinti, le due circonferenze si intersecherebbero in tre punti, il che è impossibile. Quindi, essendo $A_2 \neq B_2$ e $B' \neq A_2$, l'unica possibilità è $B_2 = B'$. Ne segue che QB_1 è tangente a Γ_2 e che B_1B_2 è tangente a Γ_2. Analogamente, B_1B_2 è tangente a Γ_1, da cui la tesi.

Problema 15 *Sia P un punto esterno ad una circonferenza Γ e siano A e B i punti di contatto tra Γ e le tangenti condotte da P. Sia C un punto sul minore fra i due archi di estremi A e B, e sia D la seconda intersezione fra la retta PC e Γ. Sia r la retta per B parallela a PA. La retta r interseca AC ed AD in E ed F, rispettivamente. Dimostrare che B è il punto medio di EF.*

Soluzione:

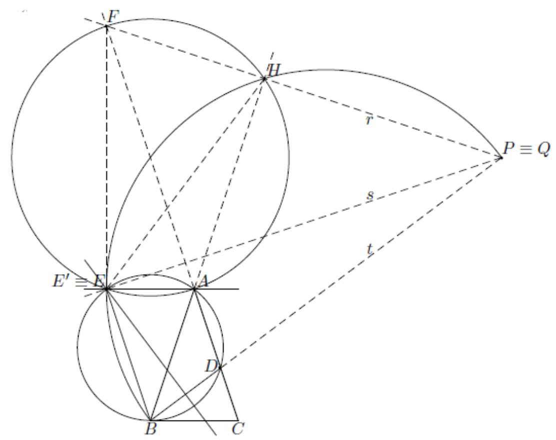


$PAE \cong AEB$ perché angoli alterni interni, $AEB \cong ABC$ perché angoli alla circonferenza, da cui la similitudine fra i triangoli ABC e ABE. Allora $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{BE}$ e quindi $BE \cong BC \cdot \frac{AE}{AB}$. Sia α il supplementare dell'angolo DAP, $\alpha \cong AFE$ perché angoli alterni interni e $\alpha \cong ABD$ perché angoli alla circonferenza insistenti sullo stesso arco, da cui la similitudine tra i triangoli ABD ed ADF. Da ciò segue $\frac{BD}{BF} = \frac{AD}{AB}$ e quindi $BF \cong BD \cdot \frac{AB}{AD}$. Resta da dimostrare che $\frac{BD \cdot AB}{AD} = \frac{BC \cdot AE}{AB}$, cioè che $AB^2 = \frac{AD \cdot BC \cdot AE}{BD}$. Si ha $ABC \cong AEB$ e quindi AB è tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo BCE. Da questa considerazione si ricava che $AB^2 = AC \cdot AE$. Bisogna quindi dimostrare che $AB^2 = AC \cdot AE = AD \cdot BC \cdot \frac{AE}{BD}$, cioè $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$. I triangoli ACP e APD sono simili, quindi $\frac{AC}{AD} = \frac{PA}{PD}$. Anche i triangoli BCP e BDP sono simili, per cui: $\frac{BC}{BD} = \frac{PB}{PD}$. Ma $PA \cong PB$ per il teorema delle tangenti, quindi $\frac{BC}{BD} = \frac{PB}{PD} = \frac{PA}{PD} = \frac{AC}{AD}$. Da cui la tesi.

Problema 16 *Dato un triangolo isoscele ABC con $AB \cong CA$ e $BAC < \frac{\pi}{3}$, sia D il punto su AC tale che $DBC \cong BAC$, sia E l'intersezione dell'asse di BD con la retta parallela a BC passante per A, e sia F il punto sulla retta AC dalla parte di A rispetto a C, tale che la lunghezza di FA sia il doppio della lunghezza di AC. Infine siano r la perpendicolare di AB condotta da F, s la perpendicolare ad AC condotta da E e t la retta BD. Dimostrare che:*

- *le rette EB e AC sono parallele;*
- *le rette r, s, t concorrono.*

Soluzione: Si ponga $BAC \cong \alpha$ e $ABC \cong ACB \cong \beta$. Si tracci la cir-



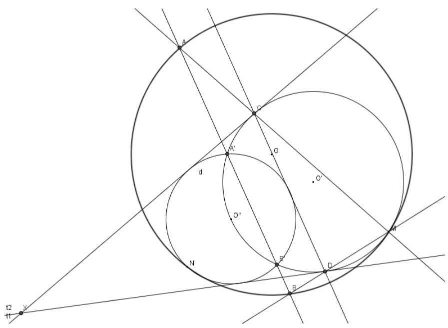
conferenza circoscritta al triangolo BDA e sia E'la sua intersezione con la parallela a BC passante per A; mostreremo che E' si trova sull'asse di BD e deve dunque coincidere con E. Abbiamo $BAD \cong BE'D \cong \alpha$ (entrambi insistono su BD), $E'DB \cong E'AB \cong ABC \cong \beta$ (segue dal parallelismo delle rette $E'A$ e BC); quindi il triangolo $BE'D$ è simile al triangolo BAC, perciò è isoscele. Ne segue che $E'E$ si trova sull'asse della base BD, come voluto. Inoltre abbiamo così ottenuto che BEA debba essere supplementare ad ADB cioè uguale a β. Ciò dimostra il parallelismo fra le rette EB e AC.

Sia ora P il punto d'intersezione tra le rette r e s, Q il punto d'intersezione ta le rette r e t; chiamiamo H la proiezione di F su AB. Per costruzione la retta r è perpendicolare alla retta AB, mentre la retta s è perpendicolare ad AC, quindi alla sua parallela BE; in altre parole gli angoli BEP e BHP sono retti, quindi il quadrilatero $BEHP$ è ciclico. Basterebbe mostrare che Q si trova sulla circonferenza circoscritta a $BEHP$ per concludere che P e Q coincidono (dato che entrambi sono punti sulla retta r diversi da H), da cui la concorrenza delle rette r, s, t.

L'angolo BQH, dato che BHQ è retto , vale $\frac{\pi}{2}-(ABC-CBD) \cong \frac{\pi}{2}+\alpha-\beta$. Si noti che il quadrilatero $AEFH$ è ciclico: AHF è retto per costruzione, EA è congruente a BC, AF è il doppio di AC, $EAF \cong \beta$, e dunque il triangolo EAF è simile al triangolo formato da A, B e dal piede dell'altezza di ABC uscente da A, dunque anche l'angolo FEA è retto. Osservando che sia FEH che FAH insistono sull'arco FH, abbiamo mostrato $FEH \cong FAH \cong \alpha$. Otteniamo di conseguenza $BEH \cong BEA + AEF \cong \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha$; ovvero gli angoli BQH e BEH sono supplementari, quindi il quadrilatero $BQHE$ è ciclico. Abbiamo così dimostrato che Q appartiene alla circonferenza circoscritta a $BEHP$, da cui la tesi.

Problema 17 *Due circonferenze Γ_1 e Γ_2 sono contenute in una circonferenza Γ, e sono tangenti a Γ, rispettivamente, nei punti M ed N (distinti). La circonferenza Γ_1 passa per il centro di Γ_2. La retta passante per i punti di intersezione tra Γ_1 e $\Gamma - 2$ interseca Γ in A e B, rispettivamente. Le rette MA ed MB intersecano Γ_1 in C e in D rispettivamente. Dimostrare che CD è tangente a Γ_2.*

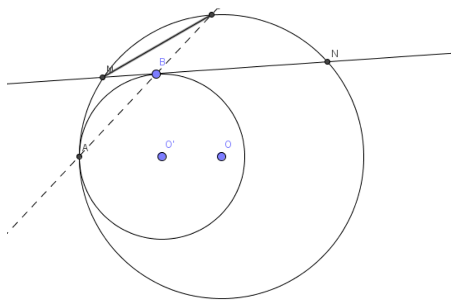
Soluzione:



Premettiamo il seguente

Lemma: Una circonferenza Ω_1 è tangente internamente ad una circonferenza Ω nel punto A ed è tangente in B ad una corda MN di Ω. Sia C il punto medio dell'arco MN di Ω che non contiene A. Allora, A, B e C sono allineati e $CA \cdot CB = CM^2$.

Dimostrazione del lemma: L'omotetia con centro in A che manda Ω_1 in

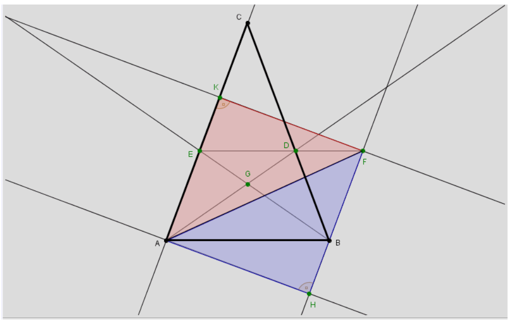


Ω, trasforma la retta MN nella retta tangente ad Ω e parallela a MN, cioè la tangente in C ad Ω. Questo dimostra che A, B, e C sono allineati. La seconda parte dell'enunciato segue dalla simmetria dei triangoli ACM ed MCB.

Soluzione del problema: Siano O_1 ed O_2, rispettivamente, i centri di Γ_1 e Γ_2, e siano t_1 e t_2 le due tangenti comuni a Γ_1 e Γ_2. Siano α e β gli archi tagliati su Γ da t_1 e t_2, posizionati come nel lemma. I punti medi di tali archi hanno, per il lemma, uguale potenza rispetto a Γ_1 e Γ_2, dunque appartengono alla retta passante per i punti di intersezione tra Γ_1 e Γ_2. Pertanto A e B sono i punti medi di α e β. Dal lemma deduciamo quindi che C e D sono i punti in cui t_1 e t_2 sono tangenti a Γ_1. Ora l'omotetia di centro M che manda Γ_1 in Γ, trasforma CD in AB. Ne segue che AB è parallelo a CD, quindi CD è perpendicolare ad O_1O_2 ed O_2 è il punto medio di un arco di Γ_1 delimitato da C e D. Sia ora X il punto in cui t_1 interseca Γ_2. Allora $XCO_2 \cong \frac{1}{2}CO_1O_2 \cong DCO_2$, quindi O_2 sta sulla bisettrice di XCD, e pertanto CD è tangente a Γ_2.

Problema 18 *Se le misure delle bisettrici degli angoli adiacenti a un lato di un triangolo sono uguali, allora il triangolo è isoscele.*

Soluzione: Partiamo quindi dall'ipotesi che i segmenti di bisettrice AD e BE siano congruenti cioè $AD \cong BE$ Costruita la retta BF in modo che sia $EBF \cong ADB$) e definito il punto F su di essa tale che $BF \cong BD$ e appartenente al medesimo semipiano definito dalla retta AB, discende per il primo criterio di congruenza dei triangoli che $ADB \cong EBF$ per avere $AD \cong EB, ABE \cong EBF, BD \cong BF$.



Ne segue che $BEF \cong DAB$. Sia ora $G = AD \cap BE$: essendo AGB esterno a EAG si ha:

$$AGB \cong AEG + EAG \cong AEG + GAB \cong AEG + GEF$$

poichè AD bisettrice di CBA per la congruenza di ABD e EBF

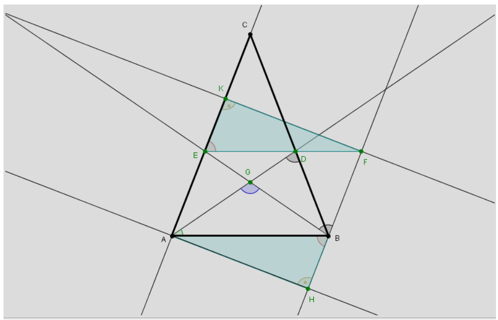
D'altra parte AGB è esterno pure di GDB per cui si ha anche:

$$AGB \cong BDG + GBD \cong BDG + GBA \cong GBF + CBA$$

Per la transitività della congruenza si possono eguagliare le espressioni ottenute per AGB per cui:

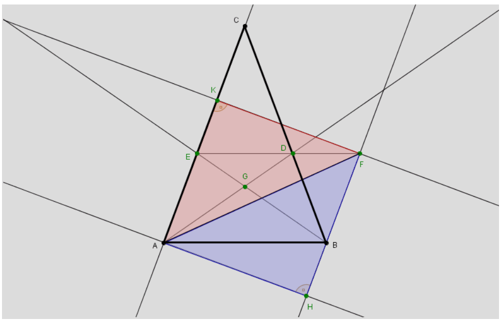
$$AEG + GEF \cong GBF + GBA$$

cioè $AEF \cong ABF$



Se ora tracciamo le perpendicolari AH a BF e FK a AC la congruenza appena dedotta vale pure per i rispettivi angoli supplementari e quindi $CEF \cong KEF \cong ABH$, cosicché per differenza con π si ha $EFK \cong BAH$ e i due triangoli EFH e BAH sono perciò congruenti: in particolare risulta $EK \cong BH$,$FK \cong AH$.

Considerando ancora i triangoli rettangoli AHF e FKA questi possiedono l'ipotenusa AF in comune e, per quanto appena visto, un cateto congruente



Per il teorema di Pitagora ne segue che avranno pure l'altro cateto congruente e quindi, per il terzo criterio di congruenza, si ha $AHF \cong FKA$. In definitiva, nel quadrilatero $AHFK$ abbiamo che i lati opposti sono congruenti e pertanto $AHFK$ è un parallelogramma con, in particolare $EFK \cong BAH$. Tenendo conto del fatto che $EFK \cong BAH$ si ha, sottraendo queste eguaglianze che $HFE \cong KAB$.Però $HFE \cong BFE \cong DBA$ da cui per transitività segue che $DBA \cong CBA \cong KAB \cong CAB$ cioè gli angoli alla base di ABC sono congruenti quindi il triangolo è isoscele.