Lezione 3 - Teoria dei $\mathbb{N}$umeri

Problema 1 *Trovare il più piccolo multiplo di* 15 *formato dalle sole cifre 0 e 8 (in base 10).*

Soluzione: Il numero cercato dev'essere divisibile per 3 e per 5 quindi l'ultima cifra deve per forza essere 0 e la somma delle cifre dev'essere un multiplo di 3 pertanto il numero cercato è 8880.

Problema 2

1. *Qual è la cifra delle unità del numero:*

$$5243^{251}$$

2. *E quella delle decine?*

Soluzione: La cifra delle unità corrisponde alla rappresentazione del numero modulo 10, dato che $3^4 \equiv 1 \mod 10$, allora abbiamo

$$5243^{251} \equiv 3^{251} \equiv 3^{4 \cdot 62+3} \equiv 3^3 \equiv 7 \mod 10.$$

Analogamente per la cifra delle decine dobbiamo considerare il numero modulo 100. Dal momento che $43^4 \equiv 1 \mod 100$ si ha

$$5243^{251} \equiv 43^{4 \cdot 62+3} \equiv 43^3 \equiv 7 \mod 100$$

quindi la cifra delle decine è 0.

Problema 3 *Dimostrare che il numero* $11 \ldots 11_{(9)}$ *in base* 9 *è un numero triangolare, cioè è somma di numeri naturali consecutivi a partire da* 1.
*(*Suggerimento*: i numeri triangolari sono della forma* $\frac{n(n+1)}{2} = 1+2+\ldots+n$*)*

Soluzione:

$$\underbrace{11\ldots11_{(9)}}_{\text{n volte}} = 1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^n = \frac{9^{n+1}-1}{9-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^{n+1}-1}{2}\cdot\frac{3^{n+1}+1}{2}$$

ponendo $k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ otteniamo

$$11\ldots11_{(9)} = \frac{k(k+1)}{2}$$

Problema 4 *Provare che nessun intero nella successione* $11, 111, 1111, 11111, \ldots$ *è un quadrato perfetto.*

Soluzione: I residui quadratici modulo 4 sono solo 0 e 1, tuttavia dato che

$$11\ldots111 \equiv 100\cdot 11\ldots1 + 11 \equiv 3 \pmod 4$$

nessuno di essi può essere un quadrato perfetto.

Problema 5 *Dimostrare che se $p > 3$ è primo allora* $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

Soluzione: Osserviamo che se $p > 3$ è primo allora $p = 6n \pm 1$ quindi si ha

$$p^2 = (6n \pm 1)^2 = 36n^2 \pm 12n + 1$$

da cui

$$36n^2 \pm 12n + 1 \equiv 12n^2 \pm 12n + 1 \equiv 12n(n \pm 1) + 1 \equiv 1 \pmod{24}$$

Problema 6 *Trovare il resto della divisione per* 7 *del numero*

$$10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \ldots + 10^{10^{10}}$$

Soluzione: Osserviamo subito che

$$\sum_{i=1}^{10} 10^{10^i} \equiv \sum_{i=1}^{10} 3^{10^i} \pmod 7$$

7 è primo quindi $\varphi(7) = 6$. Dal teorema di Eulero-Fermat abbiamo che se a è coprimo con 7 allora $a^6 \equiv 1 \pmod 7$, inoltre $10^i \equiv 4^i \equiv 4 \pmod 6$, da cui

$$\sum_{i=1}^{10} 3^{10^i} \equiv \sum_{i=1}^{10} 3^4 \equiv 10\cdot 3^4 \equiv 10\cdot 4 \equiv 5 \pmod 7$$

Problema 7 *(dal Concorso di ammissione alla SSC 2011)*
Determinare tutte le triple (x, y, z) di numeri interi che soddisfano

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1111$$

Soluzione: Osserviamo che i cubi sono congrui a 0 o ± 1 modulo 9, quindi la somma di tre cubi sarà congrua uno tra $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ modulo 9, ma 1111 è congruo a 4 modulo 9, da cui non può esistere nessuna tripla (x, y, z) di numeri interi che soddisfa l'equazione.

Problema 8 *(Giornalino Olimpiadi 21)*
Trovare il più piccolo numero maggiore di 100 *che sia pari alla somma dei fattoriali delle sue cifre.*
(ad esempio la somma dei fattoriali delle cifre di 254 *è* $2! + 5! + 4! = 146$*).*

Soluzione: Sia n un numero di 3 cifre la cui somma dei fattoriali sia uguale ad n. Osserviamo subito che $7!, 8!, 9! > 1000$ quindi n non può contenere le cifre $7, 8, 9$. Inoltre $6! = 720$ pertanto se una delle cifre di n fosse uguale a 6 allora $n \geq 720$ da cui n conterebbe almeno una cifra tra $7, 8, 9$, caso che è stato precedentemente escluso, quindi n non può avere cifre uguali a 6. Se supponiamo che n abbia tutte le cifre diverse da 5 allora la somma dei fattoriali delle sue cifre non supera $3 \cdot 4! = 72 < 100$ quindi almeno una delle cifre di n deve essere uguale a 5. A questo punto procediamo per tentativi per i numeri del tipo $1x5$, da cui otteniamo che $145 = 1! + 4! + 5!$.

Problema 9 *Dimostrare che*

1. *Se* $n > 2$ *allora* $2^n - 1$ *non è una potenza di* 3.
2. *Se* $n > 3$ *allora* $2^n + 1$ *non è una potenza di* 3.

Soluzione:

1. Se n è dispari allora $2^n \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 2^n - 1 \equiv 1 \pmod 3$, quindi non può essere una potenza di 3. Supponiamo adesso $n = 2m$ allora

$$2^{2m} - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1)$$

$2^m - 1$ e $2^m + 1$ sono entrambi maggiori di 1 e almeno uno dei due non è divisibile per 3, quindi $2^{2m} - 1$ non può essere una potenza di 3.

2. Supponiamo che $2^n + 1 = 3^m$ per qualche intero m. Se m è dispari allora
$$2^n = 3^m - 1 = (3-1)(3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1)$$
il secondo fattore dell'ultimo termine è dispari arrivando così a una contraddizione. Supponiamo adesso $m = 2k$, scriviamo $3^k = 2a + 1$ così da ottenere
$$2^n = (3^k)^2 - 1 = (2a+1)^2 - 1 = 4a^2 + 4a = 4a(a+1)$$
uno tra a e $a+1$ è dispari quindi dev'essere $a = 1 \Rightarrow n = 3$, pertanto non si hanno soluzioni per $n > 3$.

Problema 10 *Provare che la successione di Fibonacci, definita ricorsivamente come segue*
$$F_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n > 1 \end{cases}$$
è periodica modulo m, con m intero qualsiasi.

Soluzione: Fissiamo m intero. Le possibili coppie di due numeri successivi della successione modulo m sono in numero finito, pertanto a un certo punto ritroveremo una delle possibili coppie ripetuta. Dato che la successione di Fibonacci è definita ricorsivamente rispetto ai due termini precedenti da questo punto in poi tutti i termini della successione (modulo m) saranno ripetuti.

Problema 11 *(dal Concorso di ammissione alla SSC 2009)*
Si determinino tutte le quintuple (a, b, c, d, e) di numeri primi distinti tra loro tali che
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + e^2$$

Soluzione: Ovviamente i cinque numeri primi non possono essere tutti dispari, quindi almeno uno di essi è il numero 2 e gli altri sono dispari. Inoltre, ogni quadrato di un numero dispari è congruo a 1 modulo 4, il che implica che 2 deve essere uno tra c, d, e. Ci riduciamo quindi a cercare 4 primi dispari tali che
$$a^2 + b^2 = 4 + d^2 + e^2.$$
Il quadrato di un numero dispari è sempre congruo a 1 modulo 8, si vede allora facilmente che nessuna quaterna di numeri dispari può soddisfare questa

equazione. Di conseguenza non ci sono quintuple di primi che soddisfano l'equazione iniziale.

Problema 12

1. *Quali sono le ultime tre cifre di* 7^{10001} *?*

2. *E di* 7^{9999} *?*

Soluzione: Cercare le ultime tre cifre di n vuol dire conoscere n modulo 1000. Osserviamo che $\varphi(1000) = 400$, dal momento che $10000 = 400 \cdot 25$ allora

$$7^{10001} \equiv 7 \cdot 7^{10000} \equiv 7 \pmod{1000}$$

Per quanto riguarda 7^{9999}, posto $x = 7^{9999}$ abbiamo

$$7x \equiv 7^{10000} \equiv 1 \pmod{1000}$$

quindi il problema si riduce a risolvere l'equazione diofantea $7x + 1000y = 1$. In questo caso particolare, però, abbiamo $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ da cui segue facilmente che $x \equiv 13 \cdot 11 \equiv 143 \pmod{1000}$.

Problema 13 *Provare che se $n+1$ è divisibile per 8 allora n non può essere scritto come somma di tre quadrati.*

Soluzione: Se $n+1$ è divisibile per 8 allora $n \equiv 7 \pmod 8$. Osserviamo che i quadrati sono congrui $0, 1$ o 4 modulo 8 da cui otteniamo che per qualsiasi x, y, z interi $x^2 + y^2 + z^2$ non è congruo a 7 modulo 8, quindi n non può essere scritto come somma di tre quadrati.

Problema 14 *(dal Concorso di ammissione alla SSC 2013)*
Dato un intero n, mettiamo $3n$ cifre uguali tra il numero 3 e il numero 7. Dimostrare che il numero così ottenuto è divisibile per 37.

Soluzione: Fissato il numero intero n e la cifra $0 \leq a \leq 9$, il numero che otteniamo è del tipo

$$3\underbrace{aaa\ldots aaa}_{3n}7 = 3 \cdot 10^{3n+1} + 10a(111 \cdot 10^{3(n-1)} + \ldots + 111 \cdot 10^3 + 111) + 7 =$$

$$= 3 \cdot 10^{3n+1} + 7 + 10a(10^{3(n-1)} + \ldots + 10^3 + 1) \cdot 111.$$

Osserviamo che $111 = 37 \cdot 3$, quindi il problema si riduce a mostrare che il numero $3 \cdot 10^{3n+1} + 7$ è divisibile per 37. Notiamo inoltre che 10^3 è congruo a 1 modulo 37, infatti $1000 = 37 \cdot 27 + 1$, da cui otteniamo

$$3 \cdot 10^{3n+1} + 7 \equiv 30 \cdot (10^3)^n + 7 \equiv 30 + 7 \equiv 0 \pmod{37}.$$

Problema 15

1. *Trovare un'espressione regolare per la successione a_n formata in questo modo*
$$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots, \underbrace{n, \ldots, n}_{2n+1 \text{ volte}}, \ldots$$

2. *Fare lo stesso per la successione b_n così formata*
$$1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, \ldots, \underbrace{n, \ldots, n}_{n+1 \text{ volte}}, \ldots$$

(con espressione regolare si intende esprimere l'n-esimo termine della successione solo in funzione di n).

<u>Soluzione</u>:

1. La formula cercata è $a_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Per provare ciò è sufficiente dimostrare che $a_n \leq \sqrt{n} < a_n + 1$.
Prima di tutto osserviamo che la successione a_n aumenta di 1 ogni $2n + 1$ numeri naturali cosicché
$$N = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 \Rightarrow a_N = n$$
poiché N è somma dei primi n numeri dispari. Dal momento che
$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$$
(ciò può essere provato per induzione o osservando che $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$) si ha $a_{n^2} = n$.
Inoltre se n è un numero naturale e q^2 è il più grande quadrato minore di n allora $n = q^2 + r$ con $0 \leq r < 2q + 1$ allora $a_n = q$. Dunque si ha
$$a_n = q \leq \sqrt{q^2 + r} = \sqrt{n} < \sqrt{q^2 + 2q + 1} = \sqrt{(q+1)^2} = q + 1 = a_n + 1$$

2. La formula cercata è

$$b_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right\rfloor .$$

Utilizziamo un ragionamento simile a prima. La successione b_n aumenta di 1 ogni $n+1$ numeri naturali cosicché

$$N = 1+2+3+\ldots+n \Rightarrow a_N = n$$

poiché N è somma dei primi n numeri naturali. Dal momento che

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ciò può essere provato per induzione oppure osservando che $\frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{(n+1)n}{2} = n+1$) si ha

$$b_{\frac{n(n+1)}{2}} = n.$$

Inoltre se n è un numero naturale sia q il più grande intero tale che $n = \frac{(q+1)q}{2} + r$ con $0 \leq r < q+1$, in questo modo risulta $a_n = q$. Adesso osserviamo che se $f(q) = \frac{(q+1)q}{2}$ allora si ha $n = f(q) + r$, $f(q) + (q+1) = f(q+1)$ e inoltre

$$f^{-1}(q) = \frac{\sqrt{8q+1}-1}{2},$$

con f^{-1} crescente. Dalle osservazioni precedenti segue che

$$a_n = q = f^{-1}(f(q)) \leq f^{-1}(f(q)+r) = f^{-1}(n) = \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} <$$
$$< f^{-1}(f(q)+q+1) = f^{-1}(f(q+1)) = q+1 = a_n + 1$$

Problema 16 *Mostrare che da qualunque terna di interi è possibile sceglierne due tali che $a^3b - ab^3$ sia divisibile per 10.*

Soluzione: Osserviamo che $a^3b - ab^3 = ab(a-b)(a+b)$. Poichè almeno uno dei fattori deve essere pari segue subito la divisibilità per 2. Per provare la divisibilità per 5 notiamo che se uno dei tre interi è esso stesso divisibile per 5, abbiamo concluso. Se nessuno è divisile per 5 i tre interi sono della forma $5k \pm 1$ oppure $5k \pm 3$, per il principio dei cassetti due di essi sono tali che la loro somma o la loro differenza è divisibile per 5.

Problema 17 *Si consideri la successione crescente* $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \ldots$, *composta da tutti i numeri interi positivi che sono potenze di 3 o somma di potenze distinte di tre. Trovare il centesimo elemento della successione.*

Soluzione: Osserviamo che un numero appartiene alla successione, se nella sua scrittura in base 3 non compare mai la cifra 2. La sequenza in base tre sarà dunque:

$$1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \ldots.$$

Rileggendo la successione in binario i numeri corrispondo a $1, 2, 3, \ldots$ dunque il centesimo elemento della successione sarà il numero che in base 3 ha la stessa scrittura di 100 in binario, ovvero:

$$100 = 1100100_2 \Rightarrow 1100100_3 = 3^6 + 3^5 + 3^2 = 981$$

Problema 18 *(dal Concorso di ammissione alla SSC 2015)*
Dato un qualunque numero naturale n *si mostri che esistono* n *numeri interi consecutivi nessuno dei quali è primo.*

Soluzione: Dato $n \in \mathbb{N}$, si considerino i numeri $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + n + 1$. Evidentemente nessuno di loro è primo in quanto sono divisi rispettivamente da $2, 3, \ldots, n+1$, quindi abbiamo n numeri consecutivi nessuno dei quali è primo.

Problema 19 *Siano* n,$p > 1$ *interi positivi e sia* p *primo. Sappiamo che* $n|p-1$ *e* $p|n^3-1$. *Provare che* $4p-3$ *è un quadrato perfetto.*

Soluzione: Poniamo $p = kn + 1$ e osserviamo che $n|p-1 \Rightarrow p \geq n+1$ e dalla fattorizzazione di $n^3 - 1$ ne segue che $p|n^2 + n + 1$. perciò avremo

$$p = kn + 1 | n^2 + n + 1 | kn^2 + kn + k$$

Applichiamo l'algoritmo di Euclide per il calcolo del $M.C.D.$ e otteniamo:
$MCD(kn+1, kn^2+kn+k) = MCD(kn+1, kn^2+kn+k-n(kn+1)) =$
$= MCD(kn+1, kn+k-n)$
Poichè si deve avere $MCD(kn+1, kn^2+kn+k) = kn+1$, sarà o $kn+k-n = 0$ o $k - n \geq 1$. Tuttavia la prima condizione non può essere verificata,dunque si deve avere $k \geq n+1$. Poichè si aveva anche $kn+1 \leq n^2+n+1$ si deve avere $k \leq n+1$ da cui segue $k = n+1$. Avremo dunque:

$$4p - 3 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

Problema 20 *(IMO 2005)*
Determinare tutti gli interi positivi coprimi con tutti i termini della successione

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad n \geq 1$$

Soluzione: La risposta è 1. É sufficiente dimostrare che ogni numero primo p divide a_n per qualche intero positivo n. Se $p = 2, 3$ allora p divide $a_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = 48$. Sia $p \geq 5$ primo. Dal piccolo teorema di Fermat abbiamo che

$$2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

da cui

$$6a_{p-2} \equiv 6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) \equiv 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv$$

$$\equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod p$$

quindi $p \mid 6a_{p-2}$, ma dato che $p \geq 5$ segue che p divide a_{p-2}.

Problema 21 *(IMO 2014)*
Sia $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ una successione infinita di interi positivi. Dimostrare che esiste un unico intero $n \geq 1$ tale che

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Soluzione: Definiamo $f(n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n - na_{n+1}$ (in particolare abbiamo $f(0) = a_0 > 0$). Poiché $a_{n+2} > a_{n+1}$ abbiamo

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n - na_{n+1} > a_0 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+2}.$$

Quindi $f(n) > f(n+1)$ cioè f è monotona decrescente. Dal fatto che $f(0) > 0$ segue che esiste un unico intero N tale che $f(N-1) > 0 \geq f(N)$, quindi

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{N-1} - (N-1)a_N > 0$$

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_N - Na_{N+1} \leq 0$$

da cui, riscrivendo entrambe le disugaglianze otteniamo

$$a_N < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_N}{N} \leq a_{N+1}.$$