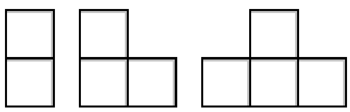
Lezione 5 - Miscellanea

Problema 1 *Un giardiniere deve strappare 2016 ortiche da un giardino. Tra gli attrezzi dispone di una enorme falce che gli consente di tagliare metà delle ortiche quando queste sono in numero pari, o delle semplici forbici grazie alla quale può tagliare 7 ortiche alla volta sebbene intanto ne ricrescano sempre due. Riuscirà il giardiniere a finire il lavoro?*

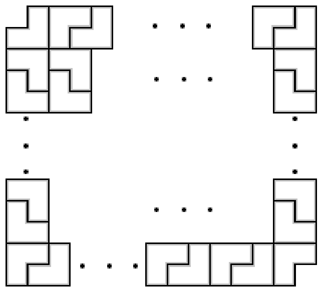
Soluzione: Osserviamo che la divisibilità per 5 del numero delle erbacce è un invariante. Applicando la prima mossa se $2n$ era divisibile per 5 dimezzando il numero di erbacce 5 sarà ancora presente nella fattorizzazione di n. Similmente se $2n$ non è divisibile 5 allora neanche la sua metà potra esserlo, o per assurdo supponendo che n sia divisibile per 5 allora anche $2n$ dovrebbe esserlo. Applicando la seconda mossa invece si mantiene invariata la quantità $n \bmod 5$. Ora poiché 2016 non è divisibile per 5 mentre 0 si, il giardiniere non riuscirà mai a finire il suo lavoro.

Problema 2 *Data una scacchiera* 50×40*, si tolgano da essa 2 quadretti posti in 2 angoli diametralmente opposti. Con quali dei seguenti tasselli è possibile tassellare la figura ottenuta?*



Soluzione: Togliendo due quadretti da due angoli opposti rimangono 1998 quadretti. E' quindi immediato verificare che il terzo pezzo non può tassellare la figura dal momento che è composto da 4 pezzi e 4 non divide 1998. Inoltre, colorando i quadretti di bianco e nero, come su una scacchiera, inizialmente ci saranno tanti quadretti bianchi quanti neri, ed i quadretti tolti risultano dello stesso colore. Pertanto la figura rimasta ha quadretti bianchi

e neri in numero diverso. Osserviamo che, in qualunque posizione si metta il primo pezzo, esso coprirà una casella bianca e una nera, pertanto con esso non è possibile tassellare la scacchiera.
E' invece possibile tassellarla con pezzi del secondo tipo come mostrato in figura (la base del rettangolo sta per il lato di 50 quadretti).



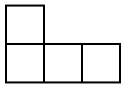
Problema 3 *Alfio e Zenone fanno un gioco su una scacchiera* 2017×2017. *Ad ogni turno ogni giocatore posiziona un cavallo in modo che questo occupi una casella libera non minacciata dai cavalli avversari. Perde il primo che non può muovere. Chi ha una strategia per vincere?*

Soluzione: Il trucco per risolvere il problema è sfruttare le simmetrie. Alfio infatti alla prima mossa occupa il centro. Successivamente ad ogni mossa di Zenone, Alfio risponde con la mossa simmetrica rispetto al centro. Se applica sempre la strategia segue che ad ogni mossa di Zenone, Alfio può ripondere. Allora, trattandosi di un gioco finito, grazie alla sua strategia non perdente, Alfio vince sempre.

Problema 4 *Sia data la sequenza 01. Una mossa consiste nell'aggiungere o rimuovere in qualsiasi punto della sequenza le sotto sequenze 00 o 11. Dimostrare che non è possibile ottenere la sequenza 10.*

Soluzione: È sufficiente osservare che la differenza tra il numero di "1" di posto pari, ed il numero di "1" di posto dispari è un invariante che nella condizione iniziale vale 1. Dal momento che nella condizione finale tale invariante vale -1 supporre che esista una sequenza di mosse che porti a tale risultato conduce ad un assurdo.

Problema 5 *Quali scacchiere $n \times n$ da cui vengono rimossi gli angoli, sono ricopribili con la piastrella in figura?*



Soluzione: Coloriamo la scacchiera come in figura 2. Dimostriamo ora che i quadrati il cui lato è congruo a 2 modulo 4 sono tutti e soli i quadrati cercati. Dato che le tessere hanno area 4, il lato di ogni quadrato costruibile non può essere dispari, quindi resta da stabilire se i quadrati di lato un multiplo di 4 siano costruibili o no.

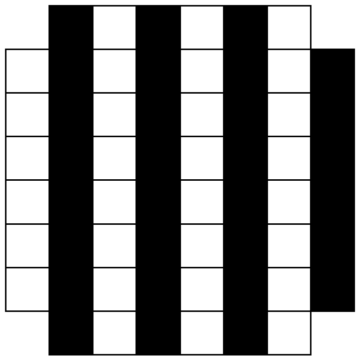


Figura 1: Colorazione del quadrato 8×8

Poiché ogni tassello occupa 3 nere e una bianca o 3 bianche ed una nera, essendo il numero di bianche uguale al numero di nere, segue che per ogni tassello del primo tipo ne esiste uno del secondo e dunque le piastrelle sono pari. Dunque il numero di caselle è divisibile per 8, ma la scacchiera qui considerata ha un numero di caselle pari a $n^2 - 4$ ma $n = 4k$ quindi:

$$(4k)^2 - 4 = 16k^2 - 4 \equiv 4 mod 8$$

Assurdo.
Dimostriamo ora che per $n = 4k + 2$ la tassellatura è possibile. Procediamo per induzione: Per $k = 1$ il quadrato è facilmente ricopribile. Supponiamo che la tesi sia vera per $k = m$ e mostriamo che è vero per $m + 1$. Allora possiamo individuare al centro un quadrato mutilato di lato m e costruire la cornice.

Problema 6 *Due giocatori stanno giocando a scacchi con la seguente regola: ad ogni turno un giocatore può fare due mosse al posto di una. Dimostrare che chi inizia ha una strategia per non perdere. [non è necessario trovare quale sia!]*

Soluzione: La strategia che il primo giocatore attua sfrutta un asso nella manica: la possibilità di muovere il cavallo avanti e indietro. Ricordiamo che il primo giocatore ha una strategia per non perdere se e solo se il secondo non ha una strategia per vincere. Supponiamo quindi per assurdo che B abbia una strategia vincente, allora A gioca il suo asso nella manica. B si ritrova ad essere il primo giocatore, mentre A il secondo. Quindi A giocando la strategia di B riuscirebbe a vincere. Ciò contraddice l'ipotesi che B abbia una strategia vincente, da cui segue l'assurdo. L'assurdo è nato dall'aver supposto che il secondo abbia una strategia vincente, dunque il primo ha certamente una strategia non perdente.

Problema 7 *Il commissario tecnico Antonio Calcoli sa quanto è importante andare in rete e per questo ha definito "punti reticolari" quei punti del piano cartesiano a coordinate intere. Per far comprendere ai suoi giocatori l'importanza delle reti ha insegnato loro una mossa. Dati due punti A, B che stanno in un insieme di punti G, la mossa consiste nell'aggiungere all'insieme G il punto simmetrico di A rispetto a B. Provare che se l'insieme G contiene inizialmente $(0,0), (1,0)$ e $(0,1)$, allora conterrà sempre solo punti reticolari ed in particolare non potrà mai contenere il punto $(1,1)$.*

Soluzione: Mostriamo in primo luogo che G contiene solo punti reticolari per induzione sul numero di elementi. Il passo base $n = 3$ è fornito dalle ipotesi. Supponiamo quindi che fino alla n-esima mossa in G vi siano solo punti reticolari, quindi scegliamo due punti A, B di coordinate (x_A, y_A) e (x_B, y_B) e calcoliamo le coordinate del punto C simmetrico di A rispetto a B. $C = (2x_B - x_A, 2y_B - y_A)$ e quindi essendo tutti questi numeri interi, anche C avrà coordinate intere, da cui segue che C è un punto reticolare. In particolare osserviamo che le coordinate di C hanno la stessa parità delle coordinate di A da cui segue che, mancando nell'insieme iniziale un punto avente entrambe le coordinate dispari, non è possibile ottenere il punto $(1,1)$.

Problema 8 *Nella città di Cesenopoli Ask e Broken, due giovani allenatori di polinomi monici meglio noti come polìmon, si stanno sfidando. Dato un polinomio di grado n il cui coefficiente di grado più alto ed il termine noto* *sono pari ad 1 e 1 rispettivamente, ad ogni turno scelgono un termine di cui non è ancora stato scritto il coefficiente e lo scrivono. Ask inizia e vince solo se il polinomio ha radici reali. Chi vincerà?*

<u>Soluzione</u>: Vince Ask sfruttando le simmetrie. Infatti se n è dispari il polinomio ha sempre una radice reale. Se n è pari, vi saranno un numero dispari di termini di cui scrivere il coefficiente, dunque Ask scrive -2 come coefficiente del termine di grado $n/2$. A questo punto quando Broke scrive il coefficiente del termine di grado h Ask scrive il numero opposto come coefficiente del termine di grado $n-h$. Giocando così tutta la partita la somma dei coefficienti farà 0 e quindi 1 sarà radice del polinomio.

<u>Soluzione 2</u>: Per ogni n intero positivo vince Ask. Come osservato in precedenza per n dispari il polinomio ammette certamente una radice reale. Per n pari invece osserviamo che vi sono un numero dispari di mosse. dunque Ask muove per ultimo. A quel punto Ask fa la somma algebrica di tutti i coefficienti del polinomio e scrive come coefficiente dell'ultimo termine rimasto l'opposto di tale somma. Segue che la somma dei coefficienti è 0 e dunque 1 è radice del polinomio.

Problema 9 *Su una circonferenza, sono disposti n numeri. In una mossa è possibile scegliere quattro numeri consecutivi a, b, c, d sulla circonferenza, tali che $(a-d)(b-c) > 0$ e scambiare di posto b e c. Dimostrare che questa mossa può essere effettuata al più un numero finito di volte.*

<u>Soluzione</u>: Chiamiamo i numeri sulla circonferenza $k_1, \ldots, k_n$. Per provare la tesi dimostreremo la seguente quantità è un monovariante:

$$S = k_1k_2 + k_2k_3 + \ldots + k_nk_1$$

Siano a, b, c, d quattro punti consecutivi che godano della proprietà richiesta. Allora eseguendo la mossa, S diminuirà di una quantità pari a:

$$ab + bc + cd - (ac + bc + db) = a(b-c) + d(c-b) = (a-d)(b-c) > 0$$

dove l'ultima disuguaglianza segue per ipotesi. Allora S decresce strettamente ogni qual volta si effettua una mossa. Essendo l'insieme delle disposizioni finito, S raggiunge il minimo dopo un numero finito di mosse.

Problema 10 *Due giocatori, Alice e Bob, fanno un gioco. Inizialmente prendono una scacchiera $n \times n$ con $n \geq 5$ vuota. Ad ogni turno Alice posiziona una pedina 2×2 mentre Bob posiziona una pedina ad L di 3 caselle. Perde chi non può più muovere. Esiste una strategia vincente per uno dei due giocatori? Chi vince?*

Soluzione: La strategia che useremo è quella del "Asso nella manica". Si osserva che se $n \geq 5$ allora ovunque A metta la prima pedina, B può individuare un rettangolo 2×3 avente un vertice in uno degli almeno 3 vertici liberi della scacchiera.
Questo poiché Alice posizionando il suo pezzo lascerà certamente tre colonne libere. Dunque dal Pigeonhole segue che almeno due sono a destra o a sinistra del pezzo messo da alice.
A questo punto Bob posiziona la sua pedina nel rettangolo precedentemente individuato come in figura. Si osserva che Alice non può occupare quello spazio a differenza di Bob. Viceversa ogni mossa che Alice può fare, può essere fatta anche da Bob. Quando Bob esaurisce le mosse possibili (a meno di quella che abbiamo costruito in precedenza) effettua la sua ultima mossa, lasciando Alice senza mosse possibili. Segue che Bob ha una strategia per vincere.

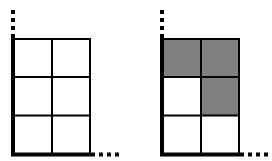


Figura 2: Asso nella manica di Bob

Problema 11 *Alberto e Barbara si sfidano al seguente gioco: inizialmente sul tavolo ci sono alcune pile di gettoni (il numero di gettoni può variare da pila a pila). A turno, partendo da Alberto, uno dei due giocatori fa una e una sola delle seguenti mosse:*

- *togliere un gettone da una pila a sua scelta ed eliminarlo dal gioco*
- *suddividere una pila in due pile più piccole, ognuna di almeno un gettone [senza aggiungere o togliere gettoni dal tavolo].*

Vince chi toglie l'ultimo gettone dal tavolo. Determinare, a seconda del numero di pile presenti sul tavolo all'inizio e di quanti gettoni contengono, quale dei due giocatori ha una strategia vincente.

Soluzione: Supponiamo innanzitutto che si parta da una situazione in cui c'è almeno un gettone presente sul tavolo, altrimenti il gioco non può nemmeno iniziare.
Siano $C_0, C_1, C_2...$ le combinazioni di pile presenti all'inizio del gioco, dopo la prima mossa, dopo la seconda eccetera. Per ogni combinazione C_i sia r_i il numero di pile che hanno un numero di gettoni $a_1, a_2, ..., a_{r_i}$ maggiore di 1 ed s_i il numero di pile che hanno un gettone. Sia poi $m_i = (a_1 - 1) + ...(a_{r_i} - 1))$.
Dimostriamo che Barbara ha una strategia vincente se m_0 e s_0 sono entrambi pari e che Alberto ha una strategia vincente in tutti gli altri casi. La strategia vincente è quella di lasciare all'avversario ad ogni mossa una combinazione C_i tale che m_i e s_i siano entrambi pari.
Infatti, osserviamo che se un giocatore si trova di fronte ad una combinazione in cui m_i e s_i sono entrambi pari, ogni sua mossa deve portare ad una combinazione in cui almeno uno fra m_{i+1} e s_{i+1} è dispari. Viceversa, supponiamo che un giocatore si trovi di fronte ad una combinazione in cui m_i e s_i sono entrambi pari:

- se m_i è pari e s_i è dispari, può eliminare una pila con un gettone
- se m_i è dispari e s_i è pari, può eliminare un gettone da una pila con almeno 3 gettoni (se esiste), oppure dividere una pila con 2 gettoni in due pile con un gettone
- se m_i ed s_i sono entrambi dispari, può dividere una pila con $a \geq 3$ gettoni (se esiste) in due pile con $a-1$ ed 1 gettone, oppure può togliere un gettone da una pila che ne contenga 2

In tutti i casi, il giocatore riesce a riproporre una combinazione in cui m_{i+1} ed s_{i+1} sono entrambi pari.
Poiché durante il gioco si può lasciare invariato il numero di gettoni presenti sul tavolo al massimo m_0 volte, il gioco certamente finisce e chiaramente la la vittoria andrà a colui che riesce a proporre la combinazione C_n in cui $m_n = s_n = 0$, entrambi pari.

Problema 12 *Dato un quadrato $n \times n$, si scelgano inizialmente h caselle e le si colori di blu. Ad ogni turno una mossa consiste nel colorare di blu una casella che abbia almeno due lati in comune con delle caselle colorate. Determinare il più piccolo numero di caselle iniziali da colorare affinchè si possa colorare tutto il quadrato.*

Soluzione: Supponiamo che le caselle del quadrato abbiano tutte lato unitario. Vogliamo dimostrare che ad ogni mossa il perimetro resta costante o diminuisce strettamente. Osserviamo che quando una casella viene colorata almeno altre due caselle confinanti lo sono già. Supponiamo che le caselle confinanti siano 2; allora segue che il perimetro rimane invariato (aumenta e diminuisce di due unità). Supponendo invece che le case confinanti siamo 3 o 4 il perimetro diminuisce strettamente di una o di due unità rispettivamente. Grazie a questa informazione possiamo affermare che comunque si prendano h caselle, queste inizialmente hanno perimetro al più pari a $4h$. Ma il quadrato ha perimetro $4n$ da cui segue che per poter essere colorato $h \geq n$ Per dimostrare che il minimo è proprio n è sufficiente osservare che colorando le n caselle della diagonale è possibile colorare tutto il quadrato.

Problema 13 *Ogni punto del piano è colorato di bianco o di nero. Dimostrare che:*

- *Esiste sempre un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.*
- *Esistono sempre 4 punti dello stesso colore tali che uno di questi punti sia il baricentro del triangolo [non necessariamente equilatero] formato dagli altri 3.*

Soluzione: Supponiamo per assurdo che tale triangolo non esista. Siano A e B due punti dello stesso colore, diciamo bianco. Considerando i due punti C e C', simmetrici rispetto al segmento AB, tali che i triangoli ABC e ABC' siano equilateri, abbiamo che sia C che C' devono essere dunque neri. Questo implica che il punto D, che sta sulla retta per AB e tale che DA = 2DB (B sta tra A e D), deve essere bianco altrimenti il triangolo CC'D, che è equilatero, sarebbe monocolore. Ripetendo allora il ragionamento precedente, il punto E che sta dalla stessa parte di C rispetto alla retta per AB e tale che il triangolo DBE sia equilatero deve anch'esso essere nero. Considerando ora il punto F intersezione della retta per A e C e della retta per D e E, vediamo che entrambi i triangoli ADF e CEF sono equilateri ma il primo ha i vertici della base A e D bianchi, il secondo ha i vertici della base C ed E entrambi neri, questo porta chiaramente ad una contraddizione non potendo quindi essere F né bianco, né nero.
2) Siano ABC tre punti distinti dello stesso colore, diciamo bianco. Il baricentro O del triangolo ABC deve essere nero, altrimenti la tesi segue. Consideriamo il punto C' che sta sulla retta OC e tale che CC' = 3OC (C sta tra O e C'). Per la proprietà del baricentro che divide ogni mediana in due parti in rapporto 2 : 1 si vede che il punto C è il baricentro del triangolo ABC', quindi il punto C' deve essere di colore nero, altrimenti abbiamo finito. Lo stesso ragionamento si ripete per gli altri vertici concludendo che i punti

analoghi A' e B' sono anch'essi neri. Ora si conclude notando che il punto O, di colore bianco è il baricentro anche del triangolo A'B'C', di vertici tutti bianchi.

Problema 14 *Su una scacchiera $2002 \cdot 60$ sono state posizionate 10000 tessere come quella in figura, in modo che ogni tessera copra esattamente 4 caselle e senza che vi siano sovrapposizioni. Dimostrare che è possibile metterne almeno un'altra senza che si sovrapponga con le precedenti.*

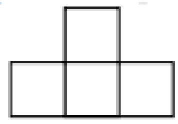


Figura 3: tessera

Soluzione: Per ogni tessera già posizionata marchiamo tutte le caselle della scacchiera che hanno almeno un lato in comune con una tessera. Questi sono al più 8. Se il quadrato centrale di ogni tessera non è un quadrato marcato (o non giace su una casella occupata da un'altra tessera) allora non si hanno sovrapposizioni tra le tessere. Osserviamo inoltre che non è possibile posizionare il quadrato centrale di una tessera in un angolo. Poiché ogni tessera proibisce $4 + 8 = 12$ quadrati, i quadrati disponibili per posizionare il centro di una tessera sono almeno $(2002 \cdot 60) - 4 - (10000 \cdot 12) = 116 > 0$, quindi è sempre possibile posizionare almeno una nuova tessera.

Problema 15 *Fissato un intero $n > 1$, Alberto e Barbara giocano il seguente gioco:*

- *Alberto sceglie un intero positivo*
- *Barbara sceglie un intero maggiore di 1 che sia multiplo o sottomultiplo del numero di Alberto (compreso il numero stesso)*
- *Alberto restituisce a Barbara il numero da lei detto, eventualmente aggiungendo o togliendo 1*

il gioco prosegue ripetendo alternativamente i passi 2 e 3. Barbara vince se riesce a scegliere n entro 50 mosse. Per quali valori di n Barbara può vincere contro qualunque strategia di Alberto?

Soluzione: Barbara riesce a pronunciare n entro 50 mosse (in realtà ne sono necessarie al più 8), indipendentemente dalla strategia di Alberto, se e solo se n è multiplo di 6.
Supponiamo infatti che n sia un multiplo di 6. Allora si ha che:

- se ad un certo passo Alberto sceglie un numero pari, al passo successivo Barbara può scegliere 2, al che Alberto può giocare solo 1, 2 o 3 ed in ogni caso al passo successivo Barbara potrà pronunciare n
- se ad un certo passo Alberto sceglie un numero dispari d, al passo successivo Barbara può scegliere $3d$, al che Alberto o gioca un numero pari (ricadendo nel caso precedente) o lascia $3d$ invariato. A questo punto Barbara sceglie il numero 3, al che Alberto può giocare solo 2, 3 o 4. Se gioca 2 o 4 perde perché sono numeri pari, se gioca 3 perde perché al passo successivo Barbara gioca n

Supponiamo ora che n non sia multiplo di 6. Allora Alberto potrà sempre giocare un numero che non sia multiplo o sottomultiplo di n, impedendo così a Barbara di vincere alla mossa successiva. Una possibile strategia di Alberto è la seguente:

- Al primo passo sceglie $n + 1$
- Quando Barbara restituisce un numero $a > n$, Alberto esamina a e $a + 1$. Poiché $n > 1$, almeno uno dei due numeri non è multiplo di n e dunque può essere giocato
- Quando Barbara restituisce un numero $b < n$, Albero esamina $b - 1$, b e $b + 1$. Trattandosi di tre numeri consecutivi, almeno uno sarà pari e almeno uno (eventualmente lo stesso) sarà divisibile per 3. Allora n non può essere divisibile contemporaneamente per $b-1$, b e $b+1$, perché altrimenti sarebbe divisibile per 6, il che è contro la nostra ipotesi.

Quindi anche in questo caso almeno uno dei tre numeri può essere giocato "in sicurezza" da Alberto.

Problema 16 *Su una comune scacchiera di lato 8 sono posizionate dodici pedine, come nel gioco della dama, ovvero sulle caselle nere delle prime tre righe. L'unica mossa consentita consiste nel mangiare una pedina propria. In altre parole se due pedine si trovano su caselle con un vertice in comune, si può eliminare quella più avanti delle due e spostare l'altra di due caselle in diagonale in modo che salti la pedina mangiata. Esiste una sequenza di mosse che porti una pedina sull'ultima fila?*

Soluzione: Numeriamo ogni riga della scacchiera come segue: mettiamo un 1 sulle prime 2 righe e poi assegniamo ad ogni riga non numerata la somma dei valori dati dalle due righe precedenti (otteniamo quindi l'inizio della successione di Fibonacci). Ad ogni pedina sulla scacchiera assegniamo il valore della riga in cui si trova e consideriamo la somma dei valori delle pedine. Per come l' abbiamo costruita, questa non cambia facendo una mossa. All'inizio questa somma vale 16, perciò è impossibile che facendo delle mosse si possa portare una pedina sull'ultima fila, il cui valore è 21.

Problema 17 *n interi sono disposti inizialmente in ordine crescente. Una mossa consiste nello scambiare di posto due numeri adiacenti. Provare che non è possibile tornare alla condizione iniziale con un numero dispari di mosse. Cosa possiamo dire se la mossa consiste nello scambiare due numeri qualsiasi?*

Soluzione: Indichiamo con $f(i)$ la posizione dell'i-esimo valore e costruiamo l'insieme

$$C = \{(i,j)1 \leq i < j \leq n : P(i) > P(j)\}$$

contente tutte le coppie di punti il cui ordine sia decrescente. Dimostreremo che la parità del numero di elementi di C cambia ad ogni mossa.
Scambiando due elementi adiacenti a e b, l'ordinamento tra gli altri elementi della sequenza ed a e b resta invariato, dunque cambia solo l'ordinamento di a rispetto a b. Se prima di effettuare la mossa $(a,b) \notin C$ allora segue che effettuando la mossa $P(b) < P(a) \Rightarrow (a,b) \in C$, viceversa se prima di effettuare la mossa $(a,b) \in C$ allora effettuando la mossa $P(a) < P(2) \Rightarrow (a,b) \in C$.
In conclusione, ad ogni mossa il numero di elementi in C aumenta o diminuisce di uno. Il problema più generale si affronta mostrando che ogni scambio di due elementi generici può essere espresso attraverso un numero dispari di scambi tra coppie di numeri adiacenti.

Problema 18 *Antonio e Bernardo giocano al seguente gioco: sono date due pile di gettoni, una con m gettoni e l'altra con n gettoni. Ogni giocatore sceglie a turno una delle seguenti mosse*

- *prendere un gettone da una delle pile*
- *prendere un gettone da ciascuna delle pile*
- *spostare un gettone da una pila ad un'altra*

Comincia Antonio e perde chi non può fare alcuna mossa. Determinare, in funzione di n e m, se uno dei due giocatori ha una strategia vincente, e, in caso affermativo, specificare di quale giocatore si tratta.

Soluzione: Se almeno uno tra m e n è dispari, vice Antonio, se sono entrambi pari vince Bernardo. Evidentemente l'unica configurazione in cui non sono più possibili mosse è quella in cui entrambe le pile sono vuote. In particolare, entrambe le pile avranno in quel momento un numero pari di gettoni. L'idea è dunque cercare di far rimanere dopo la propria mossa un numero pari di pedine in entrambe le pile.
Se nello stato iniziale esattamente una pila ha un numero dispari di pedine, Antonio prende una pedina da quella pila. Se entrambe le pile hanno un numero dispari di pedine, prende una pedina da ciascuna pila. In entrambi i casi lascia a Bernardo un numero pari di pedine in entrambe le pile; d'altra parte, ogni mossa successiva di Bernardo lascia almeno una pila con un numero dispari di pedine, permettendo ad Antonio di ripetere la sua strategia. Poiché infine ogni mossa di Antonio toglie qualche pedina, il gioco terminerà in un numero finito di passi con la vittoria di Antonio.
Se invece entrambe le pile hanno un numero pari di pedine, la situazione è simmetrica alla precedente: dopo qualsiasi mossa di Antonio ci sarà un numero dispari di pedine in almeno una delle due pile, e quindi Bernardo potrà applicare la stessa strategia di Antonio nel caso precedente.

Problema 19 *Una scacchiera $n \times n$ con $n \geq 2$ è colorata come di consueto di bianco e nero. Una mossa consiste nello scegliere un quadratino 2×2 e invertire i colori delle caselle che contiene. Per quali n è possibile ottenere una scacchiera di un unico colore?*

Soluzione: Dimostreremo ora che le uniche scacchiere che godono di questa proprietà sono quelle di lato divisibile per 4.

Condizione Necessaria: Osserviamo che la parità delle caselle nere (o bianche) su una colonna è un invariante. Questo poichè fissata una colonna, comunque si scelga un quadratino 2×2, o nessuna o due caselle di questo quadrato appartengono alla colonna. Il primo caso mantiene ovviamente il numero di caselle nere invariato. Nel secondo invece distinguiamo due casi: Se le due caselle sono inizialmente distinte allora il numero di caselle nere rimane invariato. Se invece le due caselle sono uguali, il numero di caselle nere aumenta o diminuisce di due, da cui segue che la parità delle caselle nere (o bianche) su ogni colonna è un invariante. Se $n = 2 \bmod 4$ allora su ogni colonna le caselle nere sono dispari, mentre la condizione finale richiederebbe un numero pari di caselle nere su ogni colonna. Se n è dispari allora è facile osservare che almeno una colonna ha un numero pari di caselle nere (dal momento che $n \neq 1$) ed almeno una ne ha un numero dispari, ma la configurazione finale è tale che tutte le colonne hanno la stessa parità di caselle nere. Dunque *se una scacchiera gode di questa proprietà allora ha per lato un multiplo di 4.*

Condizione Sufficiente: È sufficiente osservare che esiste un modo per colorare una scacchiera 4×4 (si lascia al lettore tale ricerca). Dal momento che ogni scacchiera avente per lato un multiplo di 4, può essere divisa in quadrati tutti di lato 4, applicando su ognuno di essi l'algoritmo precedentemente trovato, si ottiene una scacchiera di colore uniforme.

Problema 20 *Alberto e Bartolomeo fanno un gioco. A turno ognuno scrive su una lavagna un divisore di* 2010! *sapendo che il primo a scrivere un numero tale che il massimo comun divisore dei numeri sulla lavagna sia 1 perderà il gioco. Provare che un giocatore ha una strategia vincente.*

Soluzione: Proveremo ora che B ha una strategia vincente. Per farlo mostreremo che qualunque numero d scelga A, tale che $d|2010!$ allora B può scegliere un primo p che divide d, ed in particolare tale che il numero di divisori di 2010! divisibili anche per p siano in numero pari. In altre parole, data la genericità di d vogliamo dimostrare che per ogni p primo divisore di 2010! il numero di divisori di tale numero, divisibili anche per per p sono pari. Osserviamo dal teorema fondamentale dell'aritmetica che

$$2010! = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Ora il numero di divisori di 2010! è

$$(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$$

Mentre il numero di divisori non divisibili per il j-esimo primo è

$$(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{j-1} + 1) \cdot (\alpha_{j+1} + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$$

Dunque calcolando la differenza, il numero di divisori di n divisibili per p sono

$$\alpha_j \prod_{i=1 \wedge i \neq j}^{k} (\alpha_i + 1)$$

Risulta evidente che se esiste un primo il cui esponente è pari, ed uno il cui esponente è dispari questa quantità è sempre pari. Dunque qualunque d il giocatore A scelga, B può sempre scegliere un p che divide d e scrivere quel numero. A quel punto il numero di mosse possibili coincide con il numero di divisori di n divisibili per p, che abbiamo appena dimostrato essere pari. A fa la prima mossa, quindi B fa l'ultima, da cui segue che B ha una strategia per vincere sempre.