Lezione 5 - Miscellanea

Problema 1
Partizioniamo l'insieme N degli interi positivi in 2004 sottoinsiemi disgiunti. Dimostrare che uno di essi contiene almeno un multiplo di ogni intero positivo.

Soluzione: Ragioniamo per assurdo: numeriamo gli insiemi progressivamente da 1 a 2004, e definiamo per ogni insieme un numero intero positivo a_i tale che non esista nessun suo multiplo nell'insieme i-esimo. Consideriamo ora il minimo comune multiplo degli interi a_i. Per come è costruito tale numero, esso non potrebbe essere contenuto in nessun insieme della partizione ma questo è assurdo, in quanto esso deve essere contenuto in uno ed un solo insieme della partizione.

Problema 2 *(dal Concorso di ammissione alla SSC 2013)*
Sia A un insieme. Se $f : A \to A$ è una funzione, diciamo che un sottoinsieme B di A è stabile per f se $f(B) \subseteq B$. Mostrare che un insieme A è finito se e solo se esiste una funzione $f : A \to A$ tale che gli unici sottoinsiemi di A stabili per f sono l'insieme vuoto e tutto A.

Soluzione: Se A è un insieme finito con n elementi a_1, a_2,..., a_n, la funzione f che manda a_1 in a_2, a_2 in a_3,..., a_n in a_1 non ha sottoinsiemi stabili a parte l'insieme vuoto e tutto A.
Viceversa supponiamo che la funzione f sull'insieme non vuoto A abbia questa proprietà. Scegliamo $a_0 \in A$ e calcoliamo $a_1 = f(a_0)$, $a_2 = f(a_1)$, ... L'insieme B = { a_1, a_2, ... } è stabile per f, e dato che non è vuoto, deve coincidere con tutto A. Dunque $a_0 \in B$. Se $a_0 = a_n$, allora A = B = { a_1, a_2, ... } è finito.

Problema 3
Alice e Bob fanno il seguente gioco. Su una lavagna vi è scritto un intero $n \geq 2$, e a turno (inizia Alice) i due sfidanti devono fare una delle seguenti mosse:
(a) Togliere 1 da n;

(b) se $n \geq 10$, cancellare una cifra a caso dal numero e raddoppiare il risultato ottenuto; per esempio, se $n = 158$, è possibile cancellare la cifra 5 e passare all'avversario il numero $36 = 18 \cdot 2$.
Il gioco termina quando un giocatore riceve $n = 0$ e vince. Quale giocatore ha una strategia vincente, al variare di n?

<u>Soluzione</u>: Per capire la strategia vincente, consideriamo l'invariante "la parità di n". Questa quantità non è rigorosamente un invariante, tuttavia varia in maniera abbastanza semplice: infatti se n è dispari, qualunque delle due mosse restituirà un numero pari, mentre se n è pari (e $n \geq 10$), possiamo scegliere se lasciare all'avversario un numero pari o dispari. A questo punto, chi si ritrova un numero pari sceglierà sempre la mossa (a), così da lasciare all'avversario un numero dispari e riottenere quindi, dopo la mossa dell'avversario, un numero pari, fino a vincere raggiungendo lo 0 (che è pari). Ricapitolando, se n è inizialmente pari vince Alice (che effettua la prima mossa e può quindi adottare la strategia precedente passando a Bob un numero dispari), mentre se n è inizialmente dispari vince Bob.

Problema 4
Siano dati gli interi positivi $1, 2, ..., 4n-1$. Una mossa consiste nel sostituire due interi con la loro differenza. Dimostrare che dopo $4n-2$ mosse rimane un intero pari.

<u>Soluzione</u>:

1. Dopo una mossa il numero di interi diminuisce sempre di uno. Dopo $4n-2$ passi, sarà rimasto solo un numero intero.

2. Consideriamo come invariante la parità della somma di tutti gli interi. Dimostriamo che è un invariante: ogni mossa sostituisce, in questa somma, uno degli interi a con $-a$; poiché $a \equiv -a \pmod 2$, la mossa preserva l'invariante. Poiché all'inizio la somma è pari, sarà pari anche alla fine, quindi l'unico intero rimasto sarà pari.

Alternativamente:

2'. Inizialmente, ci sono $2n$ interi dispari, e $2n$ è un numero pari. Se vengono sostituiti 2 interi dispari, il numero di interi dispari diminuisce di 2. Se uno di essi è pari o entrambi sono pari, allora il numero di interi dispari resta lo stesso. Abbiamo quindi che la parità del numero di interi dispari è un invariante dato che rimane costante dopo ogni mossa. Dal momento che tale numero è inizialmente pari ($2n$), rimarrà pari fino alla fine. Quindi, l'unico intero che rimarrà alla fine è necessariamente pari.

Problema 5

Alberto per sconfiggere la solitudine ha inventato un gioco. All'inizio vi sono n bastoncini in pila, e Alberto può fare una di queste tre mosse:
a) Scegliere una pila con almeno 4 bastoncini e spezzarla in 4 pile;
b) Scegliere una pila con y bastoncini, toglierne un numero di bastoncini $k \leq y/2$ e spostarli su un'altra pila;
c) Scegliere una pila con almeno 2 bastoncini, spezzarla in 2 pile e quindi aggiungere una nuova pila con 5 bastoncini.
Alberto vuole, mediante solo queste mosse, raggiungere una configurazione in cui tutte le pile hanno un solo bastoncino. Per quali n Alberto può vincere la partita? Con che strategia?

Soluzione: Chiamiamo n il numero totale di bastoncini presenti su tutte le pile, e m il numero di pile. All'inizio, $m = 1$ ed n è assegnato, alla fine $n' = m'$. Esaminamo come agiscono su questi due valori le varie mosse.
a) n non varia mentre $m' = m + 3$.
b) n ed m restano entrambi invariati;
c) $n' = n + 5$ ed $m' = m + 2$.
A questo punto si può notare come l'espressione $(n - m) \pmod 3$ sia un invariante in questo gioco; imponendo quindi che resti uguale all'inizio e alla fine abbiamo che $(n - 1) \pmod 3 \equiv (n' - m') \pmod 3 \equiv 0 \Longrightarrow n \equiv 1 \pmod 3$. Resta solo da verificare che per ogni $n \equiv 1 \pmod 3$ il gioco ha effettivamente soluzione; ma questa soluzione si ottiene semplicemente applicando ripetutamente la mossa a), creando ogni volta 3 nuove pile da 1 bastoncino l'una.

Problema 6

Gabriele si diverte a giocare coi numeri: all'inizio scrive su un foglio (enormemente grande) tutti i numeri da 1 a 10^6. Poi sostituisce ripetutamente ogni numero con la somma delle sue cifre finchè non ottiene 10^6 numeri da 1 cifra. Ad esempio $2345 \to 2 + 3 + 4 + 5 = 14 \to 1 + 4 = 5$. Tra questi 10^6 numeri ci saranno più 1 o più 2?

Soluzione: Si consideri la somma delle cifre (mod 9). Si vede facilmente che è un invariante, perché $10 \equiv 1 \pmod 9$. Grazie all'invariante, ad ogni numero possiamo associare il suo resto nella divisione per 9. Alla fine, per avremo un numero a_i ad una cifra (non nullo) congruo al numero iniziale, quindi $a_i \equiv i \pmod 9$ e $0 < a_i < 10$. Pertanto alla fine sul foglio rimarranno in ordine i seguenti numeri: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9, 1, 2, ... , 9, 1, 2, ... , 8, 9, $10^6 \to 1$, poichè $10^6 \equiv 1 \pmod 9$. In totale dunque ci sono esattamente $\frac{10^6-1}{9}$ numeri 2 scritti sul foglio e $\frac{10^6-1}{9} + 1$ numeri 1. Dunque ci sono più 1 che 2.

Problema 7

Su un tavolo ci sono a gettoni bianchi, b neri e c rossi (almeno un gettone per ogni colore). Una mossa consiste nello scegliere due gettoni di diverso colore e sostituire ognuno di essi con un gettone del terzo colore. Trova le condizioni su a, b, c affinchè sia possibile che, dopo una certa sequenza di mosse, le tre pile abbiano lo stesso numero di gettoni.

Soluzione: Dopo una mossa la terna (a, b, c) sarà trasformata in una delle seguenti tre terne: $(a+2, b-1, c-1)$, $(a-1, b+2, c-1)$ oppure $(a-1, b-1, c+2)$. Osserviamo che dopo ogni mossa le quantità $a-b$, $b-c$ e $c-a$ rimangono costanti $\pmod 3$. Osserviamo inoltre che la somma dei gettoni $a+b+c$ rimane costante anch'essa dopo ogni mossa. Notiamo che alla fine si ottiene una terna del tipo $(a', b', c') = (n, n, n)$ tale che $a'+b'+c' = 3n \equiv 0 \pmod 3$ e $a' - b' = n - n = 0$. Per quanto osservato prima, visto che queste due quantità sono invarianti $\pmod 3$, anche la configurazione iniziale deve essere tale che $a+b+c \equiv 0$ e $a-b \equiv 0 \pmod 3$. Da queste condizioni si ottiene $a \equiv b \pmod 3$, da cui, sostituendo si trova $c \equiv -2a \equiv a \pmod 3$, essendo $-2 \equiv 1 \pmod 3$. In conclusione la condizione necessaria è $a \equiv b \equiv c$. Mostriamo che questa condizione su a, b e c è anche sufficiente. Supponiamo che sia $a = max\,(a, b, c)$ (se il massimo fosse b o c si procederebbe analogamente). Supponiamo inoltre, per esempio, $b \geq c$. Se $b > c$ si effettua la mossa seguente: $(a, b, c) \longrightarrow (a', b', c') = (a-1, b-1, c+2)$. Con questa mossa la differenza $a-b$ rimane costante, pertanto resta $a \geq b$; poichè, inoltre, si aveva $b > c > 0$ e b e c appartengono alla stessa classe di equivalenza modulo 3, diciamo $b = c + 3h$, $h > 0$, la quantità $b - c$ diminuisce di 3; si avrà $b' = c' + 3(h-1)$ con b' e c' positivi. Pertanto dopo h mosse di questo tipo si otterrà $b = c$. Raggiunto questo risultato cambiamo strategia: se $a = b = c$ abbiamo finito, altrimenti agiamo a coppie di mosse: $(a, b, c) \longrightarrow (a', b', c') = (a-1, b-1, c+2) \longrightarrow (a'', b'', c'') = (a'-1, b'+2, c'-1) = (a-2, b+1, c+1)$. In questo modo dopo ogni coppia di mosse rimane $b = c$ e, come prima, se inizialmente $a = b + 3k$, dopo k mosse si ha $a' = b' = c'$.

Problema 8

Le 64 case del ridente paese di Dartmouth sono disposte a forma di scacchiera 8 × 8. Sette delle case sono state infettate dall'influenza aviaria. Tale influenza è una malattia molto contagiosa: una nuova casa contrae la malattia non appena ci sono almeno due case confinanti (cioè che hanno un lato in comune) già ammalate. E possibile che l'intero villaggio venga infettato dall'influenza aviaria?

Soluzione: Supponiamo che le caselle della scacchiera abbiano lato unitario, e sia S la figura formata dall'unione di tutte le case ammalate ad un dato tempo; vogliamo dimostrare che il perimetro dell'insieme S non può mai aumentare nel tempo. Controlliamo cosa succede intorno a una nuova casa che si ammala: almeno due case confinanti sono già ammalate, e queste case possono essere disposte lungo due lati opposti o adiacenti. Esaminando entrambi questi casi, possiamo notare che vengono eliminati dal contorno di S due segmenti di lunghezza unitaria e ne vengono aggiunti due nuovi, quindi il suo perimetro resta invariato. Se invece una casa sana si ammala perchè confina con tre o quattro case ammalate, si verifica nello stesso modo che il perimetro dell'insieme diminuisce strettamente. Se le case ammalate inizialmente sono 7, il loro perimetro misura al più $7 \cdot 4 = 28$. Se per assurdo fosse possibile arrivare alla situazione finale in cui tutte le case sono ammalate, il perimetro di S dovrebbe misurare invece 32. Ma abbiamo appena dimostrato che tale perimetro non può aumentare, quindi è impossibile raggiungere tale configurazione finale.

Problema 9

Sette vertici di un cubo sono segnati con uno 0 e uno è segnato con un 1. Puoi ripetutamente selezionare uno spigolo e aumentare di 1 i numeri dei due vertici relativi a quello spigolo. Lo scopo è raggiungere (a) 8 numeri uguali, (b) 8 numeri divisibili per 3.

Soluzione: Si selezionino quattro vertici tali che a due a due non siano uniti dallo stesso spigolo. Sia x la somma dei numeri di questi vertici e sia y la somma dei numeri dei rimanenti quattro vertici. Inizialmente $I = x - y = \pm 1$. Una mossa non cambia I. Quindi né a) né b) possono essere ottenuti.

Problema 10

Nel parlamento di Matematinia, ogni membro ha al massimo tre nemici. Inoltre se un certo parlamentare A è nemico di un parlamentare B allora anche B sarà nemico di A. Provare che i parlamentari possono essere separati in due gruppi in maniera tale che ogni membro abbia al massimo un nemico nel proprio gruppo.

Soluzione: Inizialmente separiamo i membri in due gruppi in un modo qualsiasi. Sia H la somma totale di tutti i nemici che ogni membro ha nel proprio gruppo. Supponiamo che A ha almeno due nemici nel suo gruppo. Allora ha al massimo un nemico nell'altro gruppo. Se A cambia gruppo il numero H decresce. Questo decremento non può continuare sempre. In qualche momento, H raggiunge il suo minimo. Allora abbiamo raggiunto la distribuzione richiesta. L'idea di fondo è che, costruita una funzione positiva di interi che decresce ad ogni passo dell'algoritmo, si sa che l'algoritmo terminerà. Non esiste una sequenza infinita strettamente decrescente di interi positivi. H non è strettamente un invariante, ma decresce monotonamente fino a quando diventa costante. Qui la relazione di monotonia è l'invariante.

Problema 11
Un pavimento rettangolare è ricoperto con mattonelle da 2×2 e 1×4. Una mattonella si è rotta. C'è una mattonella dell'altro tipo disponibile. Mostrare che il pavimento non può essere ricoperto risistemando le mattonelle.

Soluzione: Colorare il pavimento di bianco e nero come in figura 1.

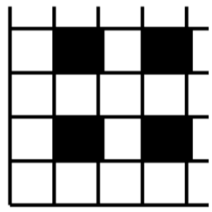

Figura 1: Colorazione del pavimento

Notiamo che una mattonella 1×4 copre sempre 0 oppure 2 quadratini neri. Una mattonella 2×2, invece, copre sempre un solo quadratino nero. Da ciò segue immediatamente che è impossibile ricoprire nuovamente il pavimento sostituendo una mattonella di un tipo con una dell'altro tipo

Problema 12 *(dal Concorso di ammissione alla SSC 2009)*
Si dica se è possibile, muovendosi come un cavallo degli scacchi, partire da un angolo della scacchiera 8×8, toccare tutte le caselle una ed una sola volta e arrivare alla casella nell'angolo opposto a quello iniziale. Si ricordi che la mossa del cavallo consiste in muovere di due caselle in una direzione e poi di una casella in una direzione ortogonale. Una casella si intende toccata se è il punto di partenza o di arrivo di una mossa completa.

Soluzione: Si noti che due caselle d'angolo opposte della scacchiera hanno lo stesso colore. Si noti poi che per ogni mossa del cavallo, la casella di partenza e quella d'arrivo hanno colori differenti. Se fosse possibile toccare tutti i cubetti una ed una sola volta, si dovrebbero fare 63 mosse, quindi (essendo 63 dispari) si cambierebbe colore un numero dispari di volte, da cui il cubetto finale avrebbe colore diverso da quello iniziale, il che è una contradizione.

Problema 13
Un castello è composto da sette piani, ognuno con nove stanze disposte come

un quadrato 3 × 3. Un principe deve entrare da una delle quattro stanze centrali del piano terra e salvare la principessa che si trova nella stanza corrispondente all'ingresso dell'eroe ma all'ultimo piano. Il principe per salvare la principessa deve attraversare tutte le stanze e raccogliere in ognuna una perla in essa contenuta, senza passare due volte per la stessa camera. Sapendo che da ogni stanza è possibile raggiungere quelle adiacenti, riuscirà il principe a salvare la principessa?

Soluzione: Coloriamo le stanze di bianco e nero in modo che stanze adiacenti siano di colore diverso. In questo modo, se coloriamo di bianco la stanza centrale da cui entra il principe, nel primo piano ci saranno 5 stanze nere e 4 bianche. Nel secondo 4 nere e 5 bianche. E così via. Così tutti i piani dispari saranno colorati come il primo, mentre tutti i piani pari saranno colorati come il secondo. In particolare la stanza della principessa sarà colorata come quella da cui entra il principe (quindi di bianco). Dato che i piani sono 7, si avranno in tutto 32 stanze nere e 31 bianche. Poiché il principe passa sempre da una stanza a quella adiacente (che è colorata di colore diverso) e poiché egli parte da una stanza bianca e dovrebbe terminare il suo percorso nella stanza della principessa che abbiamo detto essere bianca, se il principe potesse salvare la principessa passando per tutte le stanze, si dovrebbero avere in totale 31 stanze nere e 32 bianche, il che è falso.

Problema 14
Sia data una scacchiera 4 × n con n intero positivo. Dimostrare che non è possibile passare per ogni casella della scacchiera una sola volta e tornare sulla casella iniziale muovendosi come il cavallo nel gioco degli scacchi.

Soluzione:

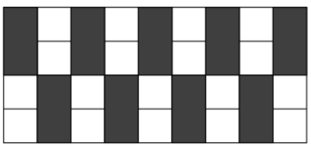

Figura 2: Colorazione della scacchiera

Disponiamo la scacchiera in modo che si abbiano 4 traverse (righe orizzontali) formate ognuna da n case. Coloriamo le case della scacchiera a colori alterni lungo le traverse, in modo che la prima casa delle quattro traverse sia rispettivamente nera (prima riga), nera (seconda riga), bianca (terza riga), bianca (quarta riga) come in figura 2. Inoltre diciamo che una casa è esterna se appartiene alla prima o all'ultima traversa, altrimenti diciamo che è centrale. La scacchiera risulta così composta da n case nere esterne, n case bianche esterne, n case nere centrali e n case bianche centrali. Una mossa di cavallo uscente da una casa esterna permette di raggiungere solo case centrali dello stesso colore, mentre per saltare da un colore all'altro occorre muoversi da una casa centrale ad un'altra centrale. Supponiamo per assurdo che esista un percorso di cavallo chiuso che tocchi tutte le case. Allora tale percorso contiene n salti di entrata dalle case nere esterne e altrettanti di uscita, ognuno dei quali raggiunge una casa nera centrale. Ma allora tutte le mosse di entrata e uscita dalle case nere centrali sono già esaurite e non ne restano a disposizione per passare da case nere a case bianche. Il percorso non può perciò raggiungere le case bianche partendo da una casa nera, il che non è possibile.

Problema 15

Un quadrato 23×23 è ricoperto con mattonelle da 1×1, 2×2 e 3×3. Qual è il minimo numero di mattonelle 1×1 necessarie?

Soluzione: Supponiamo che nessuna mattonella 1×1 sia necessaria. Coloriamo le righe del quadrato alternativamente di nero e di bianco. Ci saranno 23 quadratini neri in più di quelli bianchi. Una mattonella 2×2 copre ugualmente quadratini neri e bianchi. Una mattonella 3×3 copre 3 quadrati in più di un colore rispetto all'altro. Quindi la differenza del numero di caselle nere e bianche è divisibile per 3. Ma 23 non è divisibile per 3. Pertanto l'assunto è falso. Quindi almeno una mattonella 1×1 è necessaria. Per costruzione, dimostriamo anche che una mattonella 1×1 è sufficiente. Posizioniamo la mattonella 1×1 al centro e dividiamo la rimanente scacchiera in quattro rettangoli 12×11. La tesi segue notando che ogni rettangolo 12×11 può essere coperto usando solo mattonelle 2×2 e 3×3.

Problema 16

Diciamo che un rettangolo è disprezzabile se almeno uno dei suoi lati ha lunghezza intera. Dimostrare che un rettangolo R che si possa piastrellare con rettangoli disprezzabili dev'essere anch'esso disprezzabile.

Soluzione: Disegniamo sul piano una griglia di lato 1/2 in modo che il vertice in basso a sinistra di R sia sulla griglia e che i lati di R siano paralleli alle rette della griglia, e coloriamone le caselle alternativamente di bianco e nero come in una scacchiera. E' facile vedere che se un rettangolo con i lati paralleli alle rette della griglia è disprezzabile, allora la porzione della sua

superficie colorata di bianco è uguale a quella colorata di nero (e diciamo che è equicolorato). Infatti supponiamo per esempio che sia la base ad avere lunghezza intera: se il lato sinistro e quello destro del rettangolo sono sulla griglia (il rettangolo è centrato) l'asserzione è evidente (il rettangolo si suddivide in colonne di base 1 ciascuna delle quali è equicolorata); se invece il rettangolo è sfasato rispetto alla griglia, si può trasformarlo in un rettangolo disprezzabile centrato aggiungendo e togliendo ai lati due colonnine uguali. Abbiamo dunque dimostrato che disprezzabile $\rightarrow$ equicolorato. Ora, anche R, che è piastrellato con rettangoli equicolorati, sarà equicolorato: vogliamo mostrare che è disprezzabile.
Supponiamo per assurdo che nè la sua base nè la sua altezza siano numeri interi. A meno di sottrarre da R dei rettangoli disprezzabili (cosa che non ne cambia la disprezzabilità), possiamo supporre che la sua base e la sua altezza siano dei numeri x e y strettamente compresi fra 0 e 1. Semplici calcoli mostrano che ciò è in contraddizione con l'ipotesi che R sia equicolorato: supponiamo per esempio che il primo rettangolino $1/2 \times 1/2$ in basso a sinistra sia bianco, e analizziamo i quattro casi:
1) x $\leq 1/2$, y $\leq 1/2$: allora R è tutto bianco;
2) x $\leq 1/2$, y $> 1/2$: la parte bianca ha area x/2, la parte nera ha area $x\frac{y-1/2}{2}$, che è minore di x/2;
3) x $> 1/2$, y $\leq 1/2$: analogo a sopra;
4) x $> 1/2$, y $> 1/2$: la parte bianca ha area $1/4 + (x - 1/2)(y - 1/2)$, la parte nera ha area $1/2(x - 1/2) + 1/2(y - 1/2)$: provare che la prima è maggiore della seconda si riduce a provare che $(x - 1)(y - 1) > 0$ che è vero per costruzione.
Dunque, dalla supposizione che R non sia distrezzabile, abbiamo trovato che R non è equicolorato, il che contrasta con quanto visto nella prima parte della dimostrazione. L'assurdo mostra che R è disprezzabile.

Problema 17 *(dal Concorso di ammissione alla SSC 2009)*
Ogni punto del piano è colorato di bianco o di nero.
Si dimostri che esiste sempre un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.

Soluzione: Supponiamo per assurdo che tale triangolo monocolore non esista. Siano A e B due punti dello stesso colore, diciamo bianco. Ci sono nel piano solo due possibili punti C e C', simmetrici rispetto al segmento AB tali che il triangolo ABC sia equilatero, quindi sia C che C' devono essere neri. Questo implica che il punto D, che sta sulla retta per AB e tale che DA = 2DB (B sta tra A e D), deve essere bianco altrimenti il triangolo CC'D, che è equilatero, sarebbe monocolore. Ripetendo allora il ragionamento precedente, il punto

E che sta dalla stessa parte di C rispetto alla retta per AB e tale che il triangolo DBE sia equilatero deve anch'esso essere nero. Considerando ora il punto F intersezione della retta per A e C e della retta per D e E, vediamo che entrambi i triangoli ADF e CEF sono equilateri ma il primo ha i vertici della base A e D bianchi, il secondo ha i vertici della base C ed E entrambi neri, questo porta chiaramente ad una contradizione non potendo quindi essere F nè bianco, nè nero.

Problema 18
Un gioco che fanno Alice e Barbara ha le seguenti regole: ci sono n dischi messi in fila. A turno (comincia Alice) il giocatore toglie un numero a scelta da 1 a 7 di dischi. Vince chi toglie l'ultimo disco. Per quali n Alice vince se gioca bene? Per quali n Barbara vince se gioca bene?

Soluzione: Chiaramente chi si trova un numero di dischi compreso tra 1 e 7 ha vinto perché può toglierli tutti. Chi si ritrova a dover giocare con 8 dischi perde sicuramente perché deve lasciarne all'altro un numero compreso tra 1 e 7, che come abbiamo visto è una posizione vincente.
Vogliamo provare che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ (lo zero è naturale!), si ha:
Chi si trova a giocare con un numero di dischi compreso tra $8k+1$ e $8k+7$ vince sicuramente (se gioca bene), mentre chi si ritrova con un numero di dischi pari a $8k+8$ perde sicuramente (sempre se l'avversario gioca bene).
Procediamo per induzione. Il caso base è $k = 0$, per cui si ha il caso esaminato in precedenza. Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per un certo $k-1 \in \mathbb{N}$ e proviamo che è vera anche per k.

1. Supponiamo di dover giocare con un numero di dischi pari a $8k+i$, con $1 \leq i \leq 7$. Allora, rimuovendo i dischi, possiamo lasciare all'avversario $8k$ dischi: quindi, poiché l'affermazione è vera per $k-1$, l'avversario perde sicuramente.

2. Supponiamo invece di dover giocare con un numero di dischi pari a $8k+8$. Allora, dopo aver rimosso un qualsiasi numero i di dischi, l'avversario si troverà con $8k+8-i$ dischi, dove $1 \leq 8-i \leq 7$. Quindi, per il punto 1, l'avversario vince sicuramente.

Abbiamo provato quindi che vince Alice se n non è un multiplo di 8, altrimenti vince Barbara, e, come mostrato, la strategia vincente è di lasciare all'avversario sempre un multiplo di 8.

Problema 19
Iniziando da $n = 2$, Alessio e Barbara giocano alternativamente aggiungendo

ad n un suo divisore (strettamente minore di n). Vince chi supera per primo $n = 1990$. Inizia Alessio che, come prima mossa, è obbligato ad aggiungere 1, che è l'unico divisore di 2 utilizzabile, ottendendo $n = 3$. Chi dei due ha una strategia per vincere?

Soluzione: Alessio può sempre giocare in modo da passare a Barbara un numero dispari: infatti se Alessio passa a Barbara un numero dispari (alla prima mossa le passa $n = 3$), Barbara deve aggiungere un numero dispari (un numero dispari non ha divisori pari), lasciando ad Alessio un numero pari; a questo punto Alessio può aggiungere un qualsiasi divisore di n non multiplo di 2 (ne esistono sempre perché 1 è sempre un divisore di n). Un divisore di un numero dispari (minore del numero stesso) è al massimo un terzo di quel numero. Quindi Barbara può aggiungere al massimo un terzo del numero lasciato da Alessio. Alessio gioca sempre con un numero pari e quindi può aggiungere al massimo la metà del numero passatogli da Barbara. La strategia di Alessio è quella di giocare fino ad ottenere da Barbara un numero pari maggiore o uguale a 1328, lasciandole numeri dispari minori di 1328. Aggiungendo la metà raggiunge un numero maggiore di 1990 e vince. Mostriamo che questa strategia è sempre possibile. Se Barbara gioca con un numero dispari minore di 1328 non può mai vincere con una sola mossa: infatti o lascia un numero pari minore di 1328, oppure lascia un numero pari maggiore o uguale di 1328, ma minore o uguale di 1768 (in quanto può aggiungere al più un terzo del numero che riceve, e $1326 + \frac{1}{3}1326 = 1768$). Se Barbara lascia un numero pari minore di 1328, allora lascia al massimo 1326: in questo caso Alessio può aggiungere sempre un numero dispari in modo da non passare a Barbara un numero maggiore o uguale di 1328 (in particolare basta aggiungere 1), e quindi ricadere nel caso precedente. Se Barbara passa ad Alessio un numero pari maggiore o uguale di 1328 allora Alessio aggiungerà la metà di n, ottenendo almeno 1992.

Problema 20

In ogni quadrato di una scacchiera rettangolare c'è un intero positivo. Ad ogni mossa si può raddoppiare ogni numero in una riga o sottrarre 1 da ogni numero di una colonna. Provare che si può raggiungere una scacchiera di zeri con una sequenza di mosse permesse.

Soluzione: Supponiamo che ci siano numeri uguali a 1 nella prima colonna. In questo caso raddoppiamo le corrispondenti righe e sottraiamo 1 da tutti gli elementi della prima colonna. Questa operazione diminuisce la somma dei numeri della prima colonna fino a quando non si ottiene una colonna di 1, che trasformiamo in una colonna di zeri sottraendo 1. Poi andiamo alla colonna successiva, etc.. Se inizialmente non ci sono 1 nella prima colonna, al fine di ricadere nel caso precedente, basta sottrarre 1 da tutti gli elementi della prima colonna fino ad ottenere almeno un elemento uguale a 1.

Problema 21
Il signor Bianchi e la signora Neri amano giocare a scacchi in modo particolare usando la loro collezione di cavalli bianchi (quelli del signor Bianchi) e neri (quelli della signora Neri). A turno un giocatore piazza un cavallo su una casella di una classica scacchiera 8×8 *inizialmente vuota. La regola è che non si può piazzare il proprio cavallo su una casella minacciata da un cavallo nemico (dell'altro colore). Perde chi non può più giocare. Il signor Bianchi inizia sempre per primo. Dire, giustificando la risposta, se uno dei due giocatori ha una strategia vincente.*

Soluzione: Si consideri la linea di simmetria orizzontale (o verticale) della scacchiera. La signora Neri può vincere mettendo sempre il suo cavallo simmetricamente rispetto a quello posizionato precedentemente dal signor Bianchi. Con questa strategia, ad ogni mossa del signor Bianchi possono verificarsi due casi: se il signor Bianchi non può piazzare un cavallo, allora la signora Neri ha vinto; se invece il signor Bianchi può mettere un cavallo su una certa casella, vuol dire che tale casella non è minacciata da alcun cavallo nero. Visto che i cavalli di colore diverso sono posizionati in maniera simmetrica rispetto all'asse scelto, allora la casella simmetrica rispetto all'asse scelto non è minacciata da alcun cavallo bianco, e allora anche la signora Neri potrà posizionare il suo cavallo nella casella simmetrica a quella del signor Bianchi: quindi appena Bianchi mette il suo cavallo nella casella scelta, la signora Neri può piazzare il suo cavallo nella casella simmetrica, poichè non è minacciata da alcun cavallo per quanto detto e nemmeno dall'ultimo cavallo piazzato da Neri, visto che si trova sulla stessa riga (o colonna, a seconda dell'asse scelto).

Problema 22
Alice e Bob a turno (inizia Alice) tracciano diagonali di un poligono di 1988 lati. Essi possono collegare due vertici se la diagonale relativa non interseca una di quelle già tracciate. Perde chi non può più tracciare diagonali. Dire, giustificando la risposta, se uno dei due giocatori ha una strategia vincente.

Soluzione: Alice vince tracciando, alla sua prima mossa, una diagonale principale. Poi, per ogni mossa di Bob, Alice traccia la simmetrica (rispetto alla diagonale principale tracciata all'inizio) della diagonale tracciata da Bob subito prima (da ciò si intuisce il motivo per cui all'inizio Alice traccia una

diagonale principale: la strategia vincente è infatti quella di tracciare le diagonali simmetriche di quelle già tracciate e ogni diagonale principale è simmetrica di se stessa). Notiamo incidentalmente che, tracciata la prima diagonale principale, non si possono tracciare altre diagonali principali.
Con questa strategia ad ogni turno di Bob possono verificarsi due casi: Bob non può tracciare alcuna diagonale e quindi Alice vince, oppure la può tracciare. In quest'ultimo caso, visto che il poligono è simmetrico rispetto alla diagonale principale tracciata, Alice può sempre tracciare la diagonale simmetrica, che non interseca la diagonale appena tracciata da Bob, poichè stanno su due parti di piano distinte separate dalla diagonale principale.

Problema 23
Inizialmente c'è una pedina posizionata in una casella all'angolo di una scacchiera $n \times n$. Alberto e Barbara muovono a turno (comincia Alberto) la pedina di una casella in una qualsiasi direzione. Non possono però muovere la pedina in una casella già visitata. Perde chi non più fare una mossa.
(a) Chi vince se n è pari?
(b) Chi vince se n è dispari?
(c) Chi vince se la pedina inizialmente si trova in una casella adiacente a quella all'angolo?

<u>*Soluzione:*</u> Coloriamo le caselle della scacchiera di bianco e nero in modo che caselle adiacenti siano di colore diverso (come nelle classiche scacchiere).
(a) Se n è pari allora si può sempre partizionare la scacchiera in rettangoli 2×1 (infatti se n è pari la scacchiera ha un eguale numero di caselle bianche e nere ed ogni rettangolo copre sempre due caselle di colore diverso). La strategia di Alberto è quella di muoversi sempre all'interno del rettangolo in cui si trova, la cui altra casella non è mai stata visitata prima. Infatti all'inizio Alberto si muove per primo e quindi ogni altra casella non è stata visitata, in particolare l'altra casella del rettangolo iniziale. Dopo questa mossa le caselle visitate sono le due dell primo rettangolo e ogni altro rettangolo ha le caselle non visitate. Barbara necessariamente deve spostare la pedina in una casella e per quanto detto l'altra casella di quel rettangolo non è ancora stata visitata, il che permette ad Alberto di continuare la sua strategia spostando la pedina in quella casella, continuando così fino al termine del gioco.
(b) Per n dispari, si può dividere la scacchiera in rettangoli 2×1, tranne la casella all'angolo in cui si trova la pedina. Una strategia analoga a quella mostrata nel punto precedente è vincente per Barbara.
(c) In questo caso, Alberto vince sempre.
Per n pari, la strategia è analoga a quella proposta in a).
Per n dispari, partizioniamo la scacchiera in tanti rettangoli 2×1, tranne

la casella d'angolo. Ora coloriamo la scacchiera nel solito modo (ad esempio le caselle all'angolo bianche). Barbara non può mai passare per una casella all'angolo, poichè Alberto muove la pedina da una casella nera a una bianca, mentre Barbara muove da una casella bianca a una nera, quindi non può muovere la pedina in una casella d'angolo, essendo bianca. Così, Alberto vince con la solita strategia di muoversi al secondo quadrato di un rettangolo (in particolare per la scelta iniziale non è mai la casella d'angolo esclusa).

Problema 24
Ci sono 1990 scatole contenenti 1, ..., 1990 gettoni rispettivamente. Si può scegliere qualsiasi sottoinsieme di scatole e sottrarre lo stesso numero di gettoni da ciascuna scatola. Qual è il numero minimo di mosse necessario a svuotare tutte le scatole?

<u>*Soluzione:*</u> Servono 11 mosse. Dopo ogni mossa le scatole restano divise in sottoinsiemi contenenti ciascuno lo stesso numero di gettoni. Si supponga che ad un certo momento ci siano n sottoinsiemi di scatole (alcune delle quali possono essere vuote). Nella fase successiva selezioniamo k sottoinsiemi, da cui sottrarre lo stesso numero di gettoni. Dopo la sottrazione, scatole appartenenti a sottoinsiemi diversi appartengono ancora a sottoinsiemi diversi, e allo stesso modo, scatole non toccate appartengono ancora agli stessi sottoinsiemi. Se abbiamo iniziato con n sottoinsiemi di scatole, dopo una mossa ci sarà un numero di sottoinsiemi rimasti non inferiore a $max\,(k, n-k) \geq \frac{n}{2}$. Così ad ogni passo il numero di sottoinsiemi di scatole sarà almeno la metà del numero precedente. Inizialmente ci sono 1990 sottoinsiemi distinti. Dopo 1, ..., 11 operazioni ci saranno almeno 995, 498, 249, 125, 63, 32, 16, 8, 4, 2, 1 sottoinsiemi rimasti. Quindi abbiamo bisogno di almeno 11 mosse. Si vede poi che undici mosse sono sufficienti procedendo come segue. Sottraiamo 995 gettoni da tutte le scatole che contengono almeno 996 gettoni. Poi sottraiamo 498 gettoni da scatole con almeno 498 gettoni, e così via.

Problema 25 *(dal Concorso di ammissione alla SSC 2010)*
Si consideri il seguente gioco: si prendono due colonne di 100 numeri reali e le si mettono vicine, a turno ognuno dei due giocatori sceglie una riga fino ad averne 50 a testa. Poi ogni giocatore somma tutti i numeri della prima colonna che possiede e fa lo stesso con la seconda ottenendo una coppia di numeri, ne fa il quadrato e somma i due risultati. Vince chi ha il numero finale più grande (il pareggio è impossibile). Si dimostri che chi inizia ha una strategia per non perdere.

<u>*Soluzione:*</u> Numeriamo le righe da 1 a 100. Chiamiamo C la prima colonna, D la seconda colonna e S_C e S_D la somma degli elementi delle colonne C e D

rispettivamente. Chiamiamo poi A e B la somma degli elementi della prima e della seconda colonna scelte dal primo giocatore. Di conseguenza la somma degli elementi delle due colonne scelte dal secondo giocatore dovranno essere rispettivivamente $S_C - A$ ed $S_D - B$. Il primo giocatore vince quando $A^2 + B^2 > (S_C - A)^2 + (S_D - B)^2$ da cui segue ${S_C}^2 + {S_D}^2 - 2AS_C - 2BS_D < 0$ quindi $AS_C + BS_D > \frac{{S_C}^2 + {S_D}^2}{2}$ $(*)$. La strategia che può attuare il primo giocatore per vincere è scegliere la riga i-esima i cui elementi, che indicheremo con (a_i, b_i), sono tali che $a_i S_C + b_i S_D = max\{(a_j S_C + b_j S_D)\,,\ \forall j = 1, 2, \ldots, 100\}$. Con tale scelta la prima coppia del primo giocatore è tale che $a_j S_C + b_j S_D$ è maggiore o uguale della stessa espressione relativa alla prima coppia scelta dal secondo giocatore e in generale il discorso vale per tutte le 50 coppie scelte. Così, sommando su tutte le righe scelte si ottiene $AS_C + BS_D > (S_C - A)S_C + (S_D - B)S_D = S_C^2 - AS_C + S_D^2 - BS_D$ da cui la $(*)$.

Problema 26 *(Cesenatico 2011)*
Su una lavagna sono scritti dei numeri interi, compresi fra 1 e 7. E' possibile che non tutti i numeri da 1 a 7 siano presenti, ed è anche possibile che uno, alcuni o tutti i numeri siano ripetuti, una o piu' volte. Una mossa consiste nello scegliere uno o piu' numeri presenti sulla lavagna, purchè tutti diversi, cancellarli, e scrivere al loro posto i numeri che, unitamente a quelli cancellati, formano l'intero insieme 1,2,3,4,5,6,7. Ad esempio, mosse consentite sono:
-cancellare un 4 ed un 5, e scrivere al loro posto i numeri 1, 2, 3, 6 e 7;
-cancellare un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6 ed un 7 senza scrivere niente al loro posto.
Dimostrare che, se è possibile trovare una sequenza di mosse che, partendo dalla situazione iniziale, porti ad avere sulla lavagna un unico numero (scritto una sola volta), allora questo numero non dipende dalla sequenza di mosse utilizzata.

Soluzione: Chiamiamo n_1 il numero di cifre 1 presenti in un certo momento sulla lavagna, n_2 il numero di cifre 2, e così via fino ad n_7. Ogni volta che si fa una mossa, ognuna di queste molteplicità cambia di 1 (e quindi inverte la sua parità), perchè ogni numero tra 1 e 7 viene scritto o cancellato. Supponiamo che dopo una sequenza di k mosse rimanga sulla lavagna un unico numero, diciamo x; n_x ha cambiato parità k volte ed è infine dispari; tutte le altre molteplicità, cambiando parità anch'esse k volte, risultano infine uguali a zero, quindi pari. Anche nella situazione iniziale, perciò, n_x deve avere parità diversa da ogni altra molteplicità. Non esiste quindi alcuna sequenza di mosse che porti ad avere sulla lavagna un'unica copia di un numero y diverso da x: n_y dovrebbe partire con parità diversa da tutte le altre molteplicità, ma abbiamo già stabilito che ha la stessa parità di n_z per tutti i numeri z diversi da x.

Problema 27 *(Cesenatico 2007)*
Alberto, per festeggiare il compleanno di Barbara, propone di giocare al seguente gioco: dato l'insieme dei numeri 0,1,...,1024 Barbara rimuove da questo insieme 2^9 *numeri. Al passaggio successivo Alberto rimuove dai rimanenti* 2^8 *numeri. Tocca nuovamente a Barbara, che dai restanti ne rimuove* 2^7 *eccetera, fino a che non rimangono solo 2 numeri a e b. Alberto a questo punto deve pagare a Barbara* $|a-b|$ *euro. Determinare la massima quantità di euro che Barbara è sicura di poter incassare, indipendentemente dalla strategia adottata da Alberto.*

Soluzione: La massima somma che Barbara è sicura di incassare è di 32 euro. Ad ogni mossa, Barbara può almeno raddoppiare la minima distanza tra i numeri rimamenti. Infatti, alla prima mossa può rimuovere tutti i numeri dispari, e alle successive, indipendentemente dalle mosse di Alberto, può rimuovere, il secondo, il quarto, il sesto,... dei numeri rimasti secondo l'ordine crescente. Dopo le sue 5 mosse, la minima distanza fra i numeri rimasti sarà di almeno $2^5 = 32$. D'altra parte, Alberto può ad ogni mossa almeno dimezzare la distanza massima fra i numeri rimanenti. Infatti, dopo la prima mossa di Barbara rimarranno $2^{10} + 1 - 2^9 = 2^9 + 1$ numeri; di essi, necessariamente o fra quelli minori di 2^9 o fra quelli maggiori di 2^9 non ce ne saranno piu' di 2^8. Alberto potrà quindi togliere i rimanenti, facendo in modo che rimangano solo numeri nell'intervallo $[0, 2^9]$ o solo numeri nell'intervallo $[2^9, 2^{10}]$. Prima della mossa successiva di Alberto, saranno già stati rimossi $2^9 + 2^8 + 2^7$ numeri, e quindi ne rimarranno $2^7 + 1$, inclusi in un intervallo di lunghezza 2^9. Di conseguenza, o nella prima metà o nella seconda metà dell?intervallo rimasto (escludendo il numero centrale), non ne rimarranno più di 2^6, e quindi Alberto potrà rimuoverli tutti, lasciando solo numeri in un intervallo di lunghezza 2^8. Proseguendo con questa strategia fino alla sua quinta ed ultima mossa, Alberto potrà fare in modo di lasciare solo due numeri in un intervallo di lunghezza $2^5 = 32$, e quindi con distanza non superiore a 32. In conclusione, Barbara è sicura di guadagnare almeno 32 euro, Alberto è sicuro di non dover sborsare più di 32 euro, e quindi 32 euro è la massima somma che Barbara è sicura di incassare.