Stage Olimpiadi SSC – Gara finale

Problema 1

Dimostrare che, presi comunque $n+1$ numeri naturali distinti compresi fra 1 e $2n$ (estremi inclusi):

a) Ve ne sono sempre 2 primi tra loro.

b) Ve ne sono sempre 2 tali che uno divide l'altro.

Soluzione:

a) Consideriamo gli n insiemi $\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}$. Poiché vi sono $n+1$ numeri, per il principio dei cassetti ve ne sono due nello stesso insieme, siano a ed $a+1$. La dimostrazione è conclusa perché due numeri consecutivi sono sempre primi tra loro.

b) Sia k un numero arbitrario tra 1 e $2n$. Scriviamo k come $k = 2^a s_k$, dove $a \geq 0$ è la più grande potenza di 2 che divide k, e s_k è dispari; naturalmente, s_k è compreso tra 1 e $2n-1$. Poiché vi sono solo n numeri dispari tra 1 e $2n-1$, vi sono due numeri m e m' tali che $s_m = s_{m'}$. Allora il più piccolo dei due divide il più grande.

Problema 2

Siano $p(x) = x^3 - 14x^2 + 50x - 41$ *un polinomio di radici reali positive* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *con* $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$.

a) Calcolare la somma dei quadrati delle radici.

b) Sia $q(x) = x^3 - 14x^2 + 31x - 16$ *un polinomio avente tre radici reali positive* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *tali che* $\alpha_2 \geq \beta_2 \geq \gamma_2$. *Dimostrare che:*

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} + \frac{\beta_1^2}{\beta_2} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \geq 62.$$

Soluzione:

a) Applicando le formule di Viètè otteniamo:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)^2 - 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1) = 14^2 - 2 \cdot 50 = 96.$$

b) Osserviamo che $\frac{1}{\alpha_2} \leq \frac{1}{\beta_2} \leq \frac{1}{\gamma_2}$ quindi applicando Chebychev sulle terne ordinate $(\alpha_1^2, \beta_1^2, \gamma_1^2)$ e $(\frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\beta_2}, \frac{1}{\gamma_2})$ si ha:

$$3 \cdot \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} + \frac{\beta_1^2}{\beta_2} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \right) \geq (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \tag{1}$$

Dobbiamo ancora calcolare $\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2}$, quindi riapplicando Viètè sul polinomio $q(x)$ si ha:

$$\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2} = \frac{\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_2}{\alpha_2\beta_2\gamma_2} = \frac{31}{16}$$

e infine sostituendo nella (1)

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} + \frac{\beta_1^2}{\beta_2} + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \geq \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot \frac{31}{16} = 62.$$

Problema 3

a) Mostrare che, per ogni k intero positivo, il numero $36k^4 - 1$ non può essere la quarta potenza di un numero intero.

b) Fattorizzare il numero 107213535210701.

c) Risolvere l'equazione

$$36x^4 = 107213535210701p^7 + 1,$$

dove x è un numero intero e p è un numero primo.

<u>*Soluzione*</u>:

a) Supponiamo che $36k^4 - 1 = x^4$ per qualche x intero positivo. Ragionando modulo 3 (ma anche modulo 4 va bene) si ha $x^4 \equiv 2 \pmod 3$, il che è impossibile.

b) Scriviamo la rappresentazione in base 10 raggruppando le cifre a due a due, partendo dalla cifra delle unità. Otteniamo:

$$107213535210701 = 1 \cdot 10^{14} + 7 \cdot 10^{12} + 21 \cdot 10^{10} + 35 \cdot 10^8 + 35 \cdot 10^6 + 21 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^2 + 1.$$

Dalla formula del Binomio di Newton possiamo ricavare che

$$107213535210701 = 101^7.$$

c) Sfruttando la fattorizzazione del punto b) si ha

$$36x^4 = 101^7 p^7 + 1.$$

Portando il termine 1 a sinistra e scomponendo si ottiene

$$(6x^2 - 1)(6x^2 + 1) = 101^7 p^7.$$

Calcolando il massimo comun divisore dei due termini si ha

$$MCD(6x^2 - 1, 6x^2 + 1) = MCD(6x^2 - 1, 2) = 1.$$

Quindi tutti i vari fattori primi non possono essere in comune. Osserviamo che i due termini $6x^2 - 1, 6x^2 + 1$ devono essere positivi: ora, poiché $6x^2 - 1 \neq 1$, si deve avere necessariamente uno dei seguenti due casi:

(a) $6x^2 - 1 = p^7$, $6x^2 + 1 = 101^7$. Allora segue $p^7 + 2 = 101^7$. Ma poichè $100^7 < 101^7 - 2$ si ha un assurdo in quanto si avrebbe $100 < p < 101$.

(b) $6x^2 - 1 = 101^7$, $6x^2 + 1 = p^7$. Ragionando analogamente si ottiene $101^7 + 2 = p^7$, e analogamente si giunge ad un assurdo.

Problema 4
Siano Γ e Γ' due circonferenze che si intersecano nei punti P e Q. Consideriamo due punti distinti A e B (diversi anche da P e Q) su Γ. Le rette AP e BP incontrano la circonferenza Γ' nei punti A_1 e B_1, rispettivamente. Le rette AB e $A'B'$ si incontrano nel punto C. Sotto la restrizione che A appartenga all'arco PQ non interno a Γ' e che A_1 appartenga all'arco PQ non interno a Γ dimostrare che:

a) $A\hat{Q}A_1$ e $B\hat{C}A_1$ sono supplementari.

b) al variare di A in Γ $A\hat{Q}A_1$ è costante.

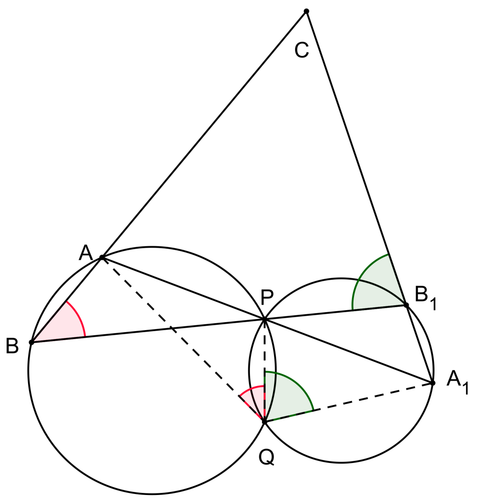
c) al variare di A e di B il luogo dei circocentri di AA_1C appartiene ad una circonferenza passante per i centri di Γ e Γ'.

<u>*Soluzione*</u>*:*

a) Gli angoli $A\hat{B}P$ e $A\hat{Q}P$ sono congruenti perché insistenti sullo stesso arco di circonferenza. Gli angoli $P\hat{Q}A_1$ e $B\hat{B}_1C = P\hat{B}_1C$ sono congruenti perché entrambi supplementari dell'angolo $P\hat{B}_1A_1$. Dunque si ha

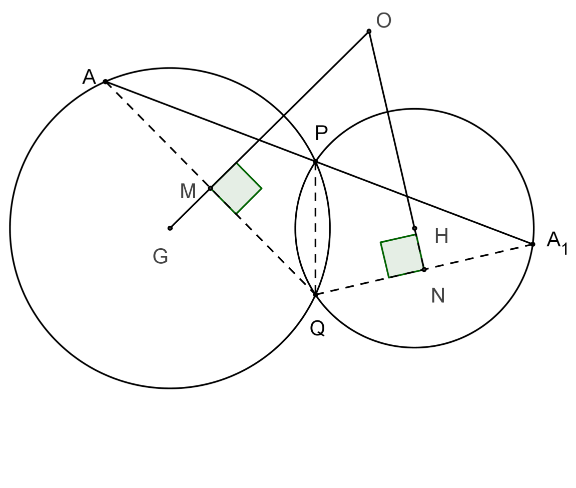
$$B\hat{C}B_1 = 180° - C\hat{B}B_1 - B\hat{B}_1C = 180° - (P\hat{Q}A_1 + A\hat{Q}P) = 180° - A\hat{Q}A_1$$

che è proprio la relazione cercata.

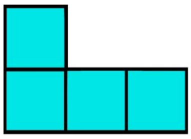


b) Basta osservare che gli angoli $P\hat{A}Q$ e $P\hat{A}_1Q$ sono costanti qualunque siano A e A_1 perché sempre insistenti sull'arco PQ, e per questo motivo, essendo $A\hat{Q}A_1 = 180° - P\hat{A}Q - P\hat{A}_1Q$, abbiamo che è esso stesso costante.

c) Dal punto (a) deduciamo che il quadrilatero ACA_1Q è inscrittibile in una circonferenza. Ciò significa che cercare il circocentro di AA_1C equivale a cercare il circocentro di AA_1Q, dato che la circonferenza che passa per A, A_1 e Q passa anche per C. Possiamo dunque trascurare il punto B e il punto C e cercare il luogo dei punti del circocentro di AQA_1 al variare di A. Troviamo il circocentro O tracciando gli assi dei segmenti AQ e QA_1, e chiamiamo M ed N i punti medi di tali segmenti. Notiamo che, secondo una nota proprietà delle circonferenze, gli assi appena tracciati, passano per i centri G ed H di Γ e Γ' rispettivamente. Inoltre, dal punto (b) possiamo dedurre che l'angolo $G\hat{O}H$ è costante, poiché esso è pari a $360° - O\hat{M}Q - O\hat{N}Q - M\hat{Q}N = 360° - 90° - 90° - M\hat{Q}N$, che è differenza di quantità costanti. Notiamo infine che i punti G e H sono fissati, e che al variare di A, $G\hat{O}H$ è costante. Osserviamo che ad ogni variazione di A corrisponde una variazione di O, e che tale variazione deve avvenire in modo tale che l'angolo $G\hat{O}H$ si mantenga costante: in pratica, stiamo cercando il luogo dei punti O del piano tali che l'angolo $G\hat{O}H$ sia costante, o equivalentemente, i punti di un piano che vedono la corda GH con lo stesso angolo: questa è in realtà la caratterizzazione di due archi di circonferenza simmetrici, aventi per estremi i punti G ed H (si può dimostrare che dalla restrizione data segue che il luogo dei punti del circocentro coincide con l'arco che si trova dalla stessa parte del punto P rispetto la retta GH).



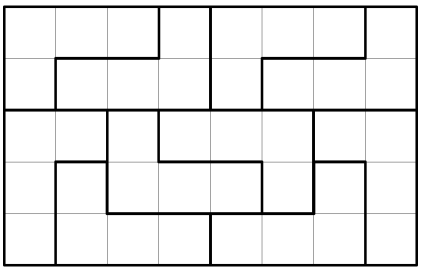
Problema 5
Considerate una scacchiera $n \times m$, per $m, n \geq 1$, e tessere a L di quattro caselle:



- *Determinare se è possibile tassellare le seguenti scacchiere: $7 \times 10, 5 \times 8, 3 \times 4$.*
- *Se m e n sono pari, in quali casi è possibile tassellare la scacchiera?*
- *Caratterizzare per quali coppie m, n è possibile tassellare la scacchiera con queste tessere.*

Soluzione:

a) Osserviamo che ogni tassello contiene 4 caselle; quindi una scacchiera tassellabile deve avere neccessariamente un numero di caselle divisibile per 4. Poiché $7 \times 10 = 70$, allora una scacchiera 7×6 non è tassellabile. Il caso 3×4 si verifica per casi. Il caso 5×8 è tassellato in figura.



b) Coloriamo la scacchiera $m \times n$ a strisce bianche e nere. Iniziamo osservando che in una colorazione siffatta, vi sono $\frac{n}{2}$ colonne bianche e $\frac{n}{2}$ colonne nere: poiché tali colonne hanno la stessa larghezza, vi sono lo stesso numero di caselle bianche e nere. Notiamo che un tetramino copre 3 caselle di un colore, e una dell'altro. Quindi l'unico modo per tassellare lo stesso numero di caselle bianche e nere è quello di tassellare la scacchiera $m \times n$

con un numero pari di tetramini: poichè ogni tetramino contiene 4 caselle, si deve avere $8|mn$. Mostriamo ora che una scacchiera $m \times n$ tale che $8|mn$ è tassellabile. Poiché m ed n sono pari, segue che almeno uno tra m ed n deve essere un multiplo di 4: quindi, a meno di rotazioni, la nostra scacchiera è della forma $2h \times 4k$ per opportuni h, k interi positivi. Quindi la scacchiera $m \times n$ è tassellabile con blocchi di dimensioni 2×4, che sono composti da due tetramini.

c) Abbiamo dedotto che una scacchiera tassellabile deve essere tale che $8|mn$. Proviamo che ogni scacchiera di questo tipo deve essere tassellabile: poichè il caso in cui sia m che n sono entrambi pari è già stato studiato, resta da esaminare il caso in cui m è dispari e $8|n$ (o viceversa). Ovviamente se $m = 1$ la scacchiera non è tassellabile. Supponiamo quindi $m \geq 3$. Possiamo supporre quindi che $m = 3 + 2h$ per qualche $h \geq 0$, e $n = 8k$ per qualche $k \geq 1$. Allora possiamo spezzare la scacchiera $m \times n$ sotto la terza riga, ottenendo due scacchiere di dimensioni $3 \times 8k$ e $2h \times 8k$. La scacchiera di dimensioni $3 \times 8k$ è tassellabile mediante blocchi di dimensioni 3×8 (la cui tassellazione si ricava dalla tassellazione della griglia 5×8 mostrata in figura), mentre la scacchiera di dimensioni $2h \times 8k$ è tassellabile mediante blocchi di dimensioni 2×4.