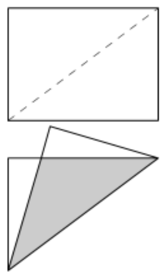
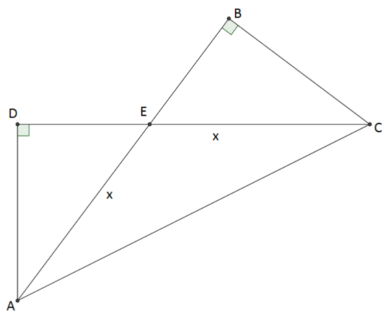
Lezione 4 - Geometria

Problema 1
Dato un foglio rettangolare di lati a e b con $a > b$. Determinare l'area del triangolo che risulta dalla sovrapposizione dei due lembi che si ottengono piegando il foglio lungo una diagonale.



<u>*Soluzione:*</u> Riferendoci alla figura sotto, possiamo dire che i due triangoli $\widehat{ADE}$ e $\widehat{EBC}$ sono uguali, in quanto sono triangoli rettangoli con i lati $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ uguali, in quanto entrambi uguali a b, e con i relativi angoli in $\widehat{E}$ uguali, in quanto angoli apposti al vertice.



Per quanto visto, i lati $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ sono uguali, per cui il triangolo $\widehat{AEC}$ è isoscele. Indichiamo $\overline{AE} = \overline{EC} = x$, per cui $\overline{DE} = \overline{EB} = a - x$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\widehat{ADE}$

$$\overline{AE}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{AD}^2 \Rightarrow x^2 = (a-x)^2 + b^2$$

$$2ax = a^2 + b^2 \Rightarrow x = \frac{a^2+b^2}{2a}$$

Per trovare l'area del triangolo $\widehat{AEC}$ basta sottrarre alla metà dell'area del rettangolo l'area del triangolo $\widehat{ADE}$

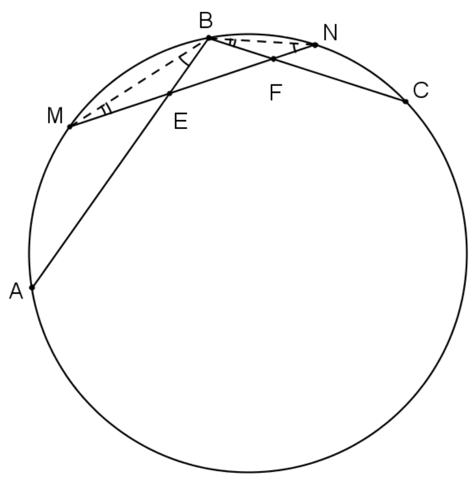
$$S_{AEC} = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b\left(a - \frac{a^2+b^2}{2a}\right) = \frac{b(a^2+b^2)}{4a}$$

Problema 2
Siano AB e BC due archi consecutivi di una circonferenza e siano M ed N i punti medi di AB e BC, rispettivamente. La corda MN interseca la corda AB in E e la corda BC in F. Si dimostri che $BE = BF$.

Soluzione: Dimostriamo che il triangolo BFE è isoscele, e per fare ciò dimostriamo che $E\hat{F}B = F\hat{E}B$ o equivalentemente $N\hat{F}B = M\hat{E}B$.
Si noti che gli angoli alla circonferenza $M\hat{N}B$ e $M\hat{B}A$ insistono su archi congruenti, e dunque sono angoli congruenti. Analogamente si ha che $N\hat{M}B = N\hat{B}C$. Si ha quindi che

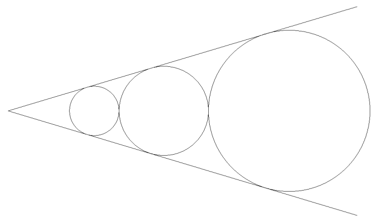
$$N\hat{F}B = 180° - M\hat{N}B - N\hat{B}C = 180° - M\hat{B}A - N\hat{M}B = M\hat{E}B$$

da cui segue la tesi.

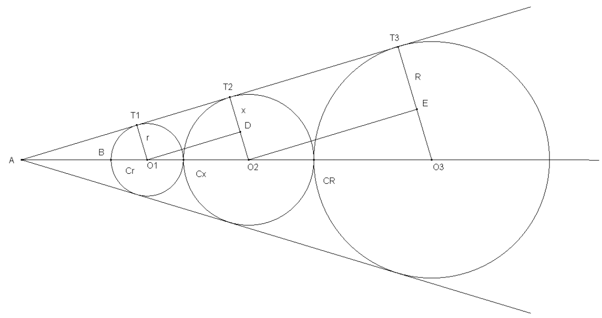


Problema 3

Si considerino le tre circonferenze C_R, C_x e C_r aventi raggi, rispettivamente, R, x e r e aventi i centri allineati. Siano, inoltre, C_R e C_r tangenti esternamente a C_x. Sapendo che le tre circonferenze hanno due tangenti esterne in comune, si calcoli x noti R e r.



<u>*Soluzione*</u>: Sia A il punto comune alle due rette tangenti e siano O_1, O_2 e O_3 i centri rispettivamente delle circonferenze C_r, C_x e C_R.



Indichiamo con B il punto di intersezione più vicino ad A tra la retta congiungente i tre centri e la circonferenza C_r. Quindi consideriamo una delle rette tangenti alle circonferenze e indichiamo con T_1, T_2 e T_3 i punti di tangenza di tale retta rispettivamente con C_r, C_x e C_R. Poniamo $\overline{AB} = y$ e notiamo che i triangoli $\widehat{AO_1T_1}$ e $\widehat{AO_2T_2}$ sono simili, essenso triangoli rettangoli con l'angolo in $\widehat{A}$ comune. Allora possiamo scrivere la proporzione

$$\overline{AO_1} : \overline{O_1T_1} = \overline{AO_2} : \overline{O_2T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y+r}{r} = \frac{y+2r+x}{x}$$

$$x(y+r) = r(y+2r+x) \Rightarrow (x-r)y + xr = 2r^2 + rx$$

$$y = \frac{2r^2}{x-r}$$

In maniera del tutto analoga, si ottiene che i triangoli $\widehat{AO_1T_1}$ e $\widehat{AO_3T_3}$ sono simili, per cui si ricava la relazione

$$\frac{y+r}{r} = \frac{y+2r+2x+R}{R} \Rightarrow y = \frac{2r}{R-r}(r+x)$$

Uguagliando le due espressioni di y si ottiene un'equazione in x la cui risoluzione ci porta alla risposta del quesito:

$$\frac{2r^2}{x-r} = \frac{2r}{R-r}(r+x) \Rightarrow \frac{r}{x-r} = \frac{r+x}{R-r}$$

Notiamo subito che questa equazione non ammette soluzione per $x = r$, ma questa eventualità non può verificarsi per costruzione geometrica, in quanto se così fosse le tre circonferenze non potrebbero avere due rette tangenti in comune. Quindi, continuando a risolvere l'equazione, otteniamo

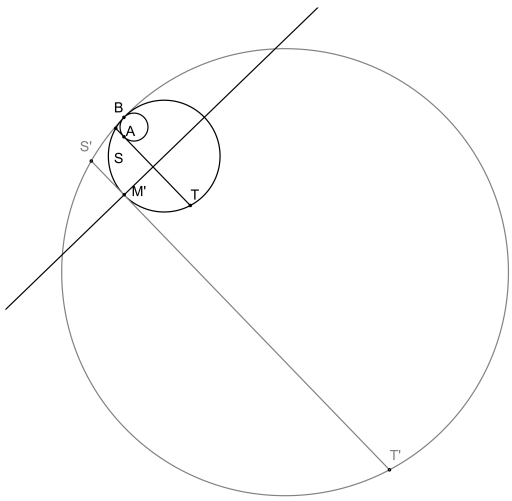
$$r(R-r) = (x+r)(x-r) \Rightarrow x^2 - r^2 = Rr - r^2 \Rightarrow x^2 = Rr$$

$$x = \sqrt{Rr}$$

Problema 4

In una circonferenza Γ di centro O viene tracciata una corda ST. Una circonferenza Γ' tangente internamente a Γ in B è tangente anche a ST nel punto A. Sia M il punto medio dell'arco ST non contenente B. Dimostrare che A, B ed M sono allineati.

<u>*Soluzione:*</u> Tramite opportuna omotetia f di centro B, la circonferenza Γ' si trasforma nella circonferenza Γ. L'omotetia f manda la retta ST in una retta parallela tangente a Γ in un punto che chiamiamo momentaneamente M'.

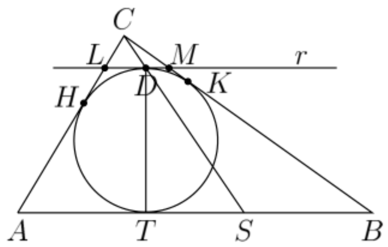


L'asse di ST passa per il centro di Γ, inoltre per parallelismo è ortogonale anche alla tangente in M'. Dal momento che M' sta sull'asse di simmetria di ST si ha che coincide con M. Pertanto M ed A si corrispondono per f e quindi sono allineati con B centro dell'omotetia.

Problema 5

Sia ABC un triangolo e sia γ la circonferenza inscritta in ABC. La circonferenza γ è tangente al lato AB nel punto T. Sia D il punto di γ diametralmente opposto a T, e sia S il punto di intersezione della retta passante per C e D con il lato AB. Dimostrare che $AT = SB$.

Soluzione: Con riferimento alla figura sotto, tracciamo la retta r passante per D e parallela al lato AB. Siano L ed M, rispettivamente, le intersezioni di r con i lati AC e BC. Denotiamo inoltre con H e K, rispettivamente, i punti di tangenza di γ con i lati AC e BC.



Poiché sulle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza risultano uguali i segmenti compresi fra il dato punto esterno e i rispettivi punti di contatto (teorema delle tangenti) abbiamo $CH = CK$, $LH = LD$ e $MK = MD$. Scrivendo $CH = CL + LH$, $CK = CM + MK$ e, sfruttando le uguaglianze precedenti, si ha

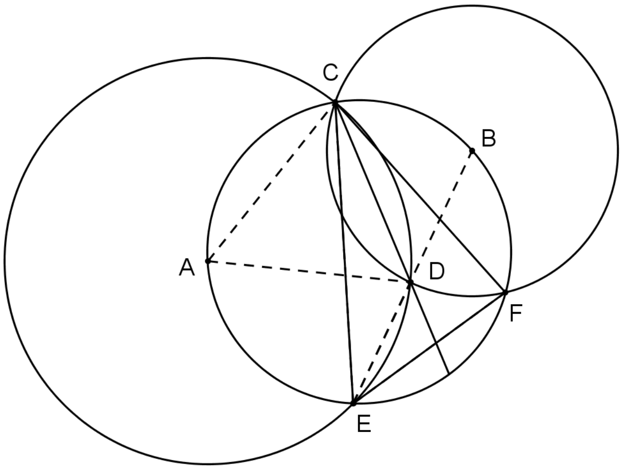
$$CL + LD = CM + MD$$

I triangoli CLM e CAB sono simili, perchè hanno i lati paralleli. Moltiplicando l'uguaglianza precedente per il rapporto di similitudine, otteniamo $CA + AS = CB + BS$, ossia $CH + HA + AT + TS = CK + KB + BS$. Utilizzando ancora il teorema delle tangenti, abbiamo $CH = CK$, $AH = AT$ e $KB = TB = TS + SB$. Ne segue che $2AT + TS = TS + 2BS$, e quindi $AT = BS$.

Problema 6

Siano date nel piano due circonferenze γ_1 e γ_2 di centri A e B rispettivamente, e intersecantesi in due punti C e D. Si supponga che la circonferenza *passante per A, B e C intersechi ulteriormente γ_1 e γ_2 in E ed F rispettivamente, e che l'arco EF non contenente C giaccia fuori dai due cerchi delimitati da γ_1 e γ_2. Dimostrare che l'arco EF non contenente C è bisecato dalla retta CD.*

Soluzione: Per il teorema dell'angolo al centro, $C\widehat{A}D = 2C\widehat{E}D$. Poiché per simmetria $C\widehat{A}B = D\widehat{A}B$, si ha $C\widehat{A}B = C\widehat{E}D$. Inoltre, $C\widehat{A}B = C\widehat{E}B$,



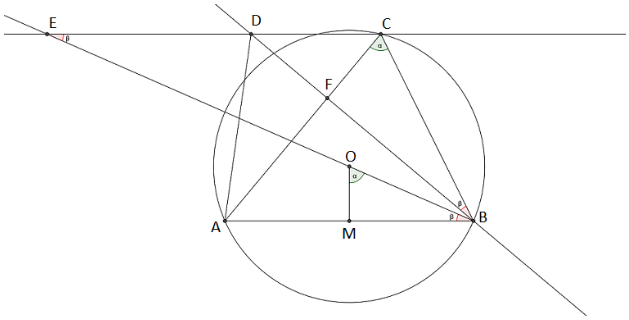
perché entrambi insistono sull'arco CB, e quindi $C\widehat{E}D = C\widehat{E}B$. Ne segue che E, D e B sono allineati (perché D e B giacciono dalla stessa parte della retta CE). Siccome gli archi CB e BF sono uguali, si ha $C\widehat{E}B = B\widehat{E}F$, quindi D appartiene alla bisettrice di $C\widehat{E}F$. Con un ragionamento analogo, si dimostra che D appartiene alla bisettrice di $C\widehat{F}E$, il che significa che D è l'incentro del triangolo CEF. Dunque la retta CD biseca l'angolo $E\widehat{C}F$, e quindi l'arco EF.

Problema 7

Sia $ABCD$ un trapezio con base maggiore AB, tale che le diagonali AC e BD siano perpendicolari. Sia O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo $A\widehat{B}C$ e sia E il punto di intersezione tra la retta OB e la retta CD. Dimostrare che vale la relazione

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE}$$

Soluzione: Sia F il punto di intersezione tra le diagonali $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e sia M il punto medio di $\overline{AB}$.



Il triangolo $\widehat{AOB}$ è ovviamente isoscele e $\overline{OM}$ è la mediana rispetto alla sua base. Ne segue che i triangoli $A\widehat{O}M$ e $B\widehat{O}M$ sono uguali e, in particolare

$$A\widehat{O}M = B\hat{O}M = \frac{1}{2}A\widehat{O}B$$

Inoltre $A\widehat{O}B$ e $A\widehat{C}B$ sono rispettivamente angolo al centro e angolo alla circonferenza insistenti sullo stesso arco $\widehat{AB}$. Quindi $A\widehat{O}B = 2A\widehat{C}B \Rightarrow B\widehat{O}M = A\widehat{C}B$. Ne segue che i triangoli $\widehat{OBM}$ e $\widehat{CBF}$, che sono triangoli rettangoli, sono simili, avendo un angolo acuto uguale (α). Allora anche l'altro angolo acuto (β) è uguale

$$O\widehat{B}M = C\widehat{B}F \Leftrightarrow A\widehat{B}E = D\widehat{B}C$$

Inoltre $A\widehat{B}E = B\widehat{E}C$ in quanto angoli alterni interni, per cui $D\widehat{B}C = B\widehat{E}C$ e dunque i triangoli $\widehat{BCD}$ e $\widehat{ECB}$ sono simili in quanto hanno l'angolo in $\widehat{C}$ in comune e un altro angolo (β) uguali, come appena dimostrato. Quindi possiamo scrivere la proporzionalità tra i lati dei triangoli

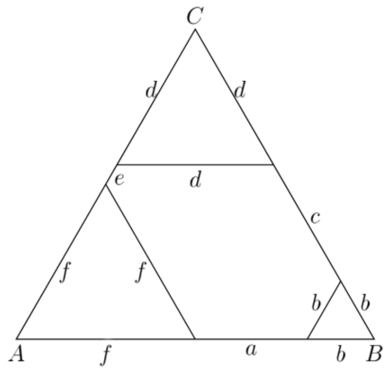
$$\overline{BC} : \overline{CD} = \overline{EC} : \overline{CB} \Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE}$$

come volevasi dimostrare.

Problema 8
Un esagono equiangolo ha quattro lati consecutivi lunghi nell'ordine 5, 3, 6 *e* 7. *Determinare le lunghezze degli altri due lati.*

Soluzione: Siano a, b, c, d, e, f i lati dell'esagono con $a = 5$, $b = 3$, $c = 6$, $d = 7$.

Si prolunghino i lati a, c, e fino ad incontrarsi nei punti B, C, A (vedi figura). Poiché gli angoli interni dell'esagono sono tutti di 120°, il triangolo ABC e i tre triangolini determinati da ciascuno dei lati f, b, d e rispettivamente dai vertici A, B, C sono tutti equilateri, dato che tutti i loro angoli



sono di 60°. Abbiamo pertanto che

$$b + c + d = d + e + f = f + a + b,$$

da cui, sostituendo i valori noti, si ricava facilmente $f = 8$ ed $e = 1$.

Problema 9

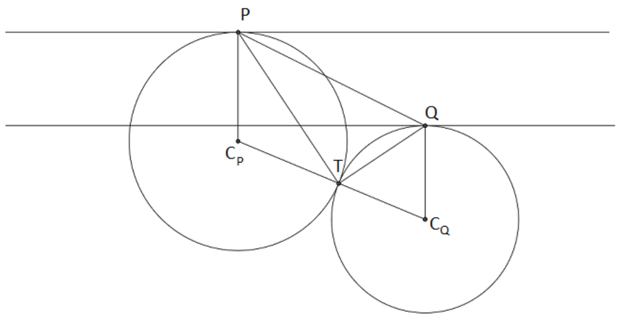
Date due rette parallele r ed s e due punti $P \in r$ e $Q \in s$, si considerino le coppie di circonferenze (C_P, C_Q) tangenti la prima a r nel punto P e la seconda a s nel punto Q, tali che C_P e C_Q siano tangenti esternamente in un punto T. Determinare il luogo dei punti descritto da T al variare di questa coppia.

<u>*Soluzione*</u>*:* Prima di tutto notiamo che la distanza $\overline{PQ}$ è fissata e indichiamo con S la striscia di piano delimitata dalle due rette r ed s. Indicando con C_P e C_Q i centri delle due circonferenze (con ovvia notazione), possiamo notare che i raggi $\overline{C_P P}$ e $\overline{C_Q Q}$ delle due circonferenze sono perpendicolari alle rette r ed s e quindi sono paralleli tra loro. A questo punto, distinguiamo diversi casi a seconda del numero di circonferenze che intersecano S: ovviamente il caso in cui nessuna circonferenza interseca S è escluso, in quanto in tal caso le due circonferenze non possono essere tangenti tra loro.

- Caso 1. Una sola circonferenza interseca S.

  Per fissare le idee supponiamo che C_Q sia la circonferenza che non interseca la striscia S: ovviamente il caso in cui è C_P a non intersecare S è del tutto simmetrico.

  Consideriamo i due triangoli isosceli $\widehat{C_P P T}$ e $\widehat{C_Q Q T}$: notiamo che gli angoli al vertice $\widehat{C_P}$ e $\widehat{C_Q}$ sono supplementari in quanto C_P, C_Q e T sono



allineati ed in quanto $\overline{C_P P}$ e $\overline{C_Q Q}$ paralleli, come osservato all'inizio. Inoltre, poniamo

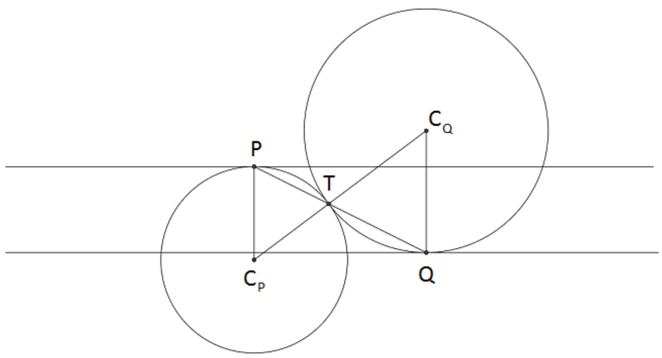
$$\alpha = C_P\widehat{T}P = C_P\widehat{P}T \qquad \beta = C_Q\widehat{T}Q = C_Q\widehat{Q}T$$

Poichè la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180°, possiamo scrivere che $\left(\widehat{C}_P + 2\alpha\right) + \left(\widehat{C}_Q + 2\beta\right) = 360°$. Ma ricordando che $\widehat{C}_P + \widehat{C}_Q = 180°$, segue che

$$2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

e quindi il triangolo $\widehat{PTQ}$ è un triangolo rettangolo con ipotenusa $\overline{PQ}$. Allora nel semipiano H delimitato dalla retta s e non contenente r, il luogo geometrico dei punti T è l'arco di circonferenza avente diametro $\overline{PQ}$. Nel semipiano G delimitato dalla retta r e non contenete s si ottiene lo stesso risultato per la simmetria prima discussa.

- Caso 2. Entrambe le circonferenze intersecano S.

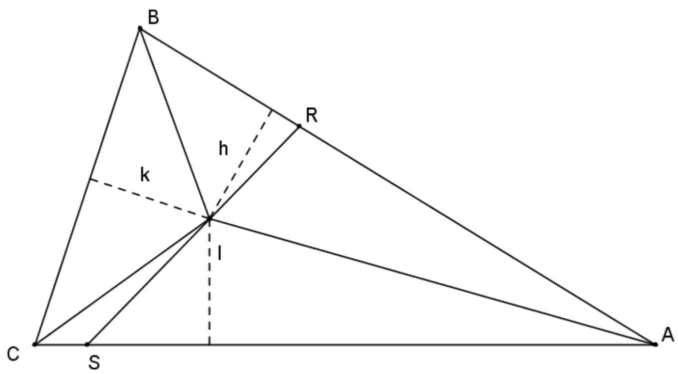


Consideriamo sempre i due triangoli isosceli $\widehat{C_P PT}$ e $\widehat{C_Q QT}$: i due angoli al vertice $\widehat{C}_P$ e $\widehat{C}_Q$ opposti alle basi dei triangoli sono angoli congruenti, essendo alterni interni. Infatti sono angoli che si ottengono tagliando le due rette $C_P P$ e $C_Q Q$, che sono parallele per quanto visto all'inizio, con la trasversale passante per C_P, C_Q e T. Allora i due triangoli $\widehat{C_P PT}$ e $\widehat{C_Q QT}$ sono simili, e questo ci permette di affermare che gli angoli $C_P \widehat{T} P$ e $C_Q \widehat{T} Q$ sono anch'essi congruenti. Ma, avendo questi due angoli un lato in comune, ovvero la retta passante per C_P, C_Q e T, dal fatto che $C_P \widehat{T} P \cong C_Q \widehat{T} Q$ segue che i punti P, Q e T sono allineati, ovvero $T \in \overline{PQ}$. Se ne conclude che all'interno della striscia S il luogo geometrico dei punti T è proprio il segmento $\overline{PQ}$.

Problema 10

Una retta divide un triangolo in due nuove figure con uguali perimetro e area. Provare che l'incentro del triangolo giace su questa retta.

Soluzione: Sia ABC il triangolo e supponiamo, senza perdita di generalità che la retta data tagli i segmenti AB e AC rispettivamente nei punti R ed S. Si tracci la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$ e sia I il suo punto di intersezione col segmento RS. Sia h la distanza di I da AB e da AC e sia k la distanza di I da BC. I poligoni ARS e $BRSC$ hanno la stessa area. Si decompone il



triangolo ARS nei triangoli ARI e ASI, mentre si suddivide il quadrilatero $BRSC$ nei triangoli BRI, CSI e BCI. Uguagliando le somme delle aree si ottiene:

$$\frac{AR \cdot h + AS \cdot h}{2} = \frac{BR \cdot h + CS \cdot h + BC \cdot k}{2}. \quad (1)$$

Inoltre, dal momento che ARS e $BRSC$ hanno anche lo stesso perimetro, si ha:

$$AR + AS = BR + CS + BC.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$(BR + CS + BC)h = (BR + CR)h + BC \cdot k$$

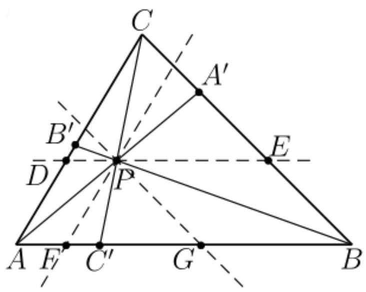
da cui si ricava che $h = k$, pertanto I è l'incentro e giace su RS come volevasi dimostrare.

Problema 11
Sia P un punto interno ad un triangolo ABC. Le rette AP, BP e CP intersecano i lati di ABC in A', B' e C' rispettivamente. Ponendo

$$x = \frac{AP}{PA'},\ y = \frac{BP}{PB'},\ z = \frac{CP}{PC'},$$

dimostrare che $xyz = x + y + z + 2$.

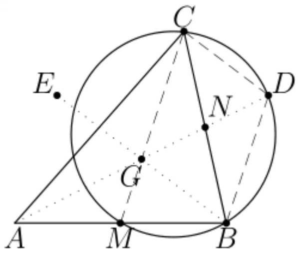
<u>Soluzione</u>*:* Si verifica facilmente che, comunque scelti tre numeri reali non nulli a, b, c, e ponendo $x = \frac{a+b}{c}$, $y = \frac{b+c}{a}$ e $z = \frac{a+c}{b}$, la relazione da dimostrare diventa un'identità algebrica.



Per trovare a, b, c si proceda come segue: siano D ed E le intersezioni della parallela ad AB passante per P con i segmenti AC e BC rispettivamente; sia F l'intersezione tra la parallela ad AC passante per P ed AB; sia G l'intersezione tra la parallela a BC passante per P ed AB. Si ponga $AF = a$, $FG = b$, $GB = c$. I triangoli DEC e FGP sono simili, poiché hanno i lati ordinatamente paralleli, ed inoltre valgono le relazioni $DP = a$, $PE = c$ e $DA = PF$, in quanto $AFPD$ e $GBEP$ sono dei parallelogrammi. Applicando il teorema di Talete alle parallele GP e BA' segue che $x = \frac{a+b}{c}$, ed analogamente segue che $y = \frac{b+c}{a}$, applicando lo stesso teorema alle parallele FP ed AB'. Ancora per il teorema di Talete, si ha $z = \frac{CD}{DA}$, da cui $z = \frac{CD}{PF} = \frac{DE}{FG}$, sfruttando la similitudine tra DEC e FGP. Dunque, $z = \frac{DP+PE}{FG} = \frac{a+c}{b}$, e questo conclude la dimostrazione.

Problema 12
Sia ABC un triangolo con baricentro G. Sia $D \neq A$ un punto sulla retta AG tale che $AG = GD$, e sia $E \neq B$ un punto sulla retta GB tale che $GB = GE$. Sia infine M il punto medio di AB. Dimostrare che il quadrilatero $BMCD$ è inscrittibile in una circonferenza se e solo se $BA = BE$.

<u>Soluzione</u>: Sia N il punto medio di BC. N è anche punto medio di GD, essendo $GD = AG$ per ipotesi, e $GN = \frac{1}{2}AG$ per le note proprietà del baricentro.

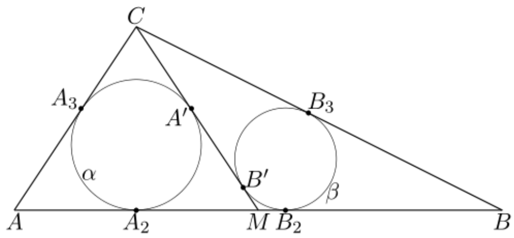


Allora $BDCG$ è un parallelogramma, avendo le diagonali che si bisecano, e $BDCM$ è un trapezio, con basi BD e CM. Un trapezio è inscrittibile in una circonferenza se e solo se è isoscele. Poiché $BDCG$ è un parallelogramma, si ha $DC = BG$; quindi $BDCM$ è inscrittibile se e solo se $BM = BG$. Per ipotesi M è il punto medio di AB e G è il punto medio di BE, quindi $BM = BG$ se e solo se $BA = BE$; ciò conclude la dimostrazione.

Problema 13

Nel triangolo ABC supponiamo di avere $a > b$, dove $a = BC$ e $b = AC$. Sia M il punto medio di AB, e siano α e β le circonferenze inscritte, rispettivamente, ai triangoli ACM e BCM. Siano poi A' e B' i punti di tangenza di α e β con CM. Dimostrare che $A'B' = \frac{a-b}{2}$.

<u>Soluzione</u>: Chiamiamo $x = MA'$, $y = MB'$, $r = CA'$, $s = CB'$.



È chiaro che

$$\pm A'B' = x - y = s - r \tag{1}$$

Denotiamo con A_2 ed A_3 i punti di tangenza di AB e AC con α, e con B_2 e B_3 i punti di tangenza di AB e BC con β. Ora usiamo ripetutamente il fatto che, tracciando le tangenti da un punto X esterno ad una circonferenza γ, e chiamati M ed N i punti di tangenza, si ha $XM = XN$. Abbiamo che $x = MA_2$, $y = MB_2$, $r = CA_3$, $s = CB'$. Poniamo poi

$$t = AA_2 = AA_3 \qquad u = BB_2 = BB_3$$

Poiché M è il punto medio di AB, abbiamo $x + t = y + u$. D'altra parte, $t = b - r$, $u = a - s$, da cui $x + b - r = y + a - s$ e quindi

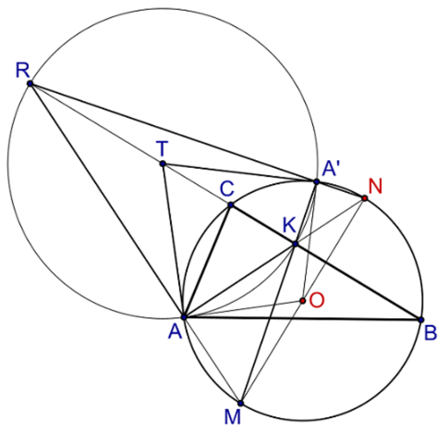
$$(x - y) + (s - r) = a - b$$

Poiché $a - b > 0$, nella (2) vale il segno + e la tesi è dimostrata.

Problema 14

Sia ABC un triangolo acutangolo, Γ la sua circonferenza circoscritta, K il piede della bisettrice relativa al vertice A. Sia M il punto medio dell'arco BC che contiene A. Detta A'la seconda intersezione di MK con Γ, si chiamino t, t' rispettivamente le tangenti a Γ in A e in A', r (rispettivamente r') la perpendicolare ad AK (rispettivamente $A'K$) passante per A (rispettivamente A'). Siano ora $T = t \cap t'$ e $R = r \cap r'$. Si provi che T, R e K sono allineati.

<u>Soluzione</u>: Denotiamo con O il centro di Γ e con N il punto medio dell'arco minore BC.



Proviamo preliminarmente che la retta RA passa per M e che la retta RA' passa per N: il primo punto è equivalente a

$$B\widehat{A}K + M\widehat{A}B = \frac{\pi}{2}$$

ma per il teorema dell'angolo alla circonferenza$M\widehat{A}B = M\widehat{C}B$, e inoltre, per ipotesi, M è punto medio dell'arco maggiore BC e K piede della bisettrice uscente da A, dunque:

$$2(B\widehat{A}K + M\widehat{A}B) = B\widehat{A}C + \pi - B\widehat{M}C = \pi$$

Per il teorema dell'angolo al centro/angolo alla circonferenza si ha:

$$C\widehat{O}N = N\widehat{O}B \Rightarrow C\widehat{A}N = N\widehat{A}B$$

dunque AK passa per N e quest'ultimo, essendo antipodale ad M in Γ, realizza $M\widehat{A'}N = \frac{\pi}{2}$ e giace su RA'. A questo punto K risulta ortocentro del triangolo MRN, ragion per cui i punti A, A', R, K appartengono ad una stessa circonferenza di diametro RK. Il centro di tale circonferenza è il punto T, in quanto AT risulta congruente ad $A'T$ per il teorema delle tangenti e il triangolo ATK risulta isoscele (su base AK) poiché:

$$K\widehat{A}T = \frac{\pi}{2} - O\widehat{A}K = N\widehat{M}A = N\widehat{B}A = C\widehat{B}A + N\widehat{B}C = C\widehat{B}A + N\widehat{A}C$$

$$T\widehat{K}A = \pi - A\widehat{C}B - \frac{B\widehat{A}C}{2} = C\widehat{B}A + \frac{B\widehat{A}C}{2} = C\widehat{B}A + N\widehat{A}C$$

Segue che T è punto medio di RK, da cui la tesi. Infatti T può essere descritto come il simmetrico di O, punto medio di MN, rispetto al circocentro del triangolo AOA'. La circonferenza circoscritta al triangolo AOA' è la circonferenza di Feuerbach (o 'dei nove punti') relativa al triangolo MRN, il suo centro è dunque punto medio del segmento avente per estremi K e il circocentro di MRN: da ciò segue che la proiezione di T su MN coincide con la proiezione di K su MN, ossia

$$TK \perp MN$$

Abbiamo però già provato che K è ortocentro di MRN, la perpendicolare ad MN per K è dunque l'altezza uscente dal vertice R. Considerato che $K \in BC$ e $BC \perp MN$, i punti B, C, K, T, R appartengono tutti a una stessa retta.

Problema 15

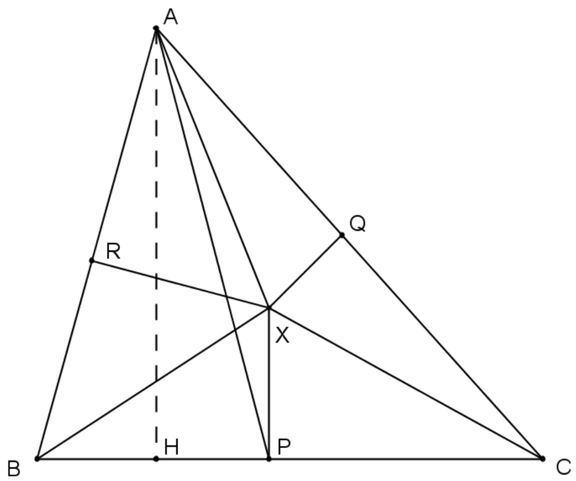
Sia ABC un triangolo e X un punto interno di ABC. Dimostrare che almeno uno degli angoli tra $X\hat{A}B$, $X\hat{B}C$, $X\hat{C}A$ è minore o uguale di $\frac{\pi}{6}$.

<u>Soluzione</u>: Siano P, Q, R i piedi delle perpendicolari condotte da X rispettivamente a BC, CA, AB.
Si ha $\text{Area}(ABX) + \text{Area}(BCX) + \text{Area}(CAX) = \text{Area}(ABC)$ e inoltre $2\text{Area}(ABC) = AB \cdot AH \leq AB \cdot AP \leq AB(AX + XP)$, per cui

$$AB \cdot XR + BC \cdot XP + CA \cdot XQ = 2\text{Area}(ABC) \leq BC(AX + XP)$$

da cui si ricava

$$BC \geq \frac{AB \cdot XR}{AX} + \frac{CA \cdot XQ}{AX}. \tag{1}$$



Notiamo ora che $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\lambda + \mu)^2 \geq (\lambda + \mu)^2 - (\lambda - \mu)^2 = 4\lambda\mu$. Applicando alla (1) otteniamo

$$BC^2 \geq 4\frac{AB \cdot CA \cdot XR \cdot XQ}{AX^2}. \tag{2}$$

Ripetendo analogamente il procedimento su CA e su AB otteniamo

$$CA^2 \geq 4\frac{BC \cdot AB \cdot XP \cdot XR}{BX^2} \tag{3}$$

$$AB^2 \geq 4\frac{AB \cdot BC \cdot XQ \cdot XP}{CX^2}. \tag{4}$$

Moltiplicando membro a membro le equazioni (2), (3) e (4) otteniamo

$$BC^2 \cdot CA^2 \cdot AB^2 \geq 64\frac{AB^2 \cdot CA^2 \cdot BC^2 \cdot XR^2 \cdot XQ^2 \cdot XP^2}{AX^2 \cdot BX^2 \cdot CX^2}$$

che semplificando e riordinando diventa

$$1 \geq 64\left(\frac{XR}{AX}\right)^2\left(\frac{XP}{BX}\right)^2\left(\frac{XQ}{CX}\right)^2 \implies \left(\frac{XR}{AX}\right)\left(\frac{XP}{BX}\right)\left(\frac{XQ}{CX}\right) \leq \frac{1}{8}.$$

Notiamo infine che $\frac{XR}{AX} = \sin X\hat{A}B$, $\frac{XP}{BX} = \sin X\hat{B}C$, $\frac{XQ}{CX} = \sin X\hat{C}A$. Chiamando α il minore tra questi angoli abbiamo

$$\sin^3 \alpha \leq \frac{1}{8} \implies \sin \alpha \leq \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \implies \alpha \leq \frac{\pi}{6}$$

che è la tesi.

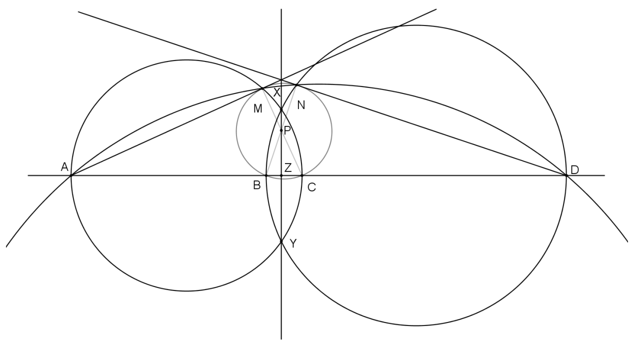
Problema 16

Siano A, B, C, D quattro punti distinti su una retta, in quest'ordine. Le circonferenze di diametro AC e BD si intersecano in X e Y. La retta XY interseca BC in Z. Sia P un punto appartenente a XY e diverso da Z. La retta CP interseca la circonferenza di diametro AC in C e in M e la retta BP interseca la circonferenza di diametro BD in B e in N. Dimostrare che le rette AM, DN, XY sono concorrenti.

Soluzione: Chiamiamo Γ_1 la circonferenza di diametro AC e Γ_2 quella di diametro BD. Poiché M appartiene a Γ_1, si ha $A\hat{M}C = 90°$ e quindi $M\hat{C}A = 90° - C\hat{A}M$. Analogamente $B\hat{N}D = 90°$. Inoltre, notiamo che XY è l'asse radicale delle due circonferenze, che, come noto, è il luogo dei punti del piano che hanno la stessa potenza rispetto a due circonferenze. Per cui, essendo $P \in XY$ si ha $PN \cdot PB = PM \cdot PC$, e dall'inverso della potenza di un punto otteniamo che il quadrilatero $MNBC$ è ciclico. Dunque $90° - C\hat{A}M = M\hat{C}A = B\hat{N}M$ poiché angoli insistenti sullo stesso arco di circonferenza. Da ciò segue

$$M\hat{N}D = B\hat{N}M + 90° = 90° - C\hat{A}M + 90° = 180° - C\hat{A}M.$$

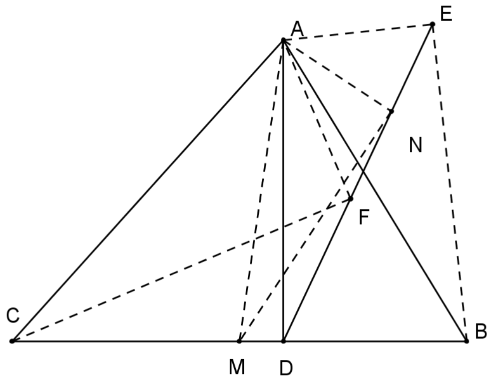
Questo significa che anche il quadrilatero $AMND$ è ciclico. Sia Γ_3 la cir-



conferenza passante per A, M, N, D. Poiché AM è l'asse radicale di Γ_1 e Γ_3 e DN l'asse radicale di Γ_3 e Γ_2, dal teorema secondo cui gli assi radicali di tre circonferenze sono concorrenti segue la tesi.

Problema 17
Sia ABC un triangolo e D il piede dell'altezza condotta da A. Siano E ed F due punti su una retta passante per D tali che $AE \perp BE$, $AF \perp CF$, $E \neq F \neq D$. Siano M ed N i punti medi dei segmenti BC ed EF, rispettivamente. Dimostrare che $AN \perp NM$.

<u>Soluzione</u>: Poiché $A\hat{D}B$ e $A\hat{E}B$ sono entrambi angoli retti, il quadrilate-



ro $ABDE$ è ciclico. Da ciò segue che $C\hat{B}A = D\hat{B}A = D\hat{E}A = F\hat{E}A$. Analogamente, il quadrilatero $ACDF$ è ciclico e quindi $A\hat{C}B = A\hat{C}D = 180° - A\hat{F}D = A\hat{F}E$. Avendo due angoli congruenti, i triangoli ACB e AFE sono simili e di conseguenza anche i triangoli AMB e ANE lo sono. Da ciò segue

$$A\hat{N}D = 180° - A\hat{N}E = 180° - A\hat{M}B = 180° - A\hat{M}D$$

e quindi il quadrilatero $ANMD$ e ciclico e $A\hat{N}M$, insistendo sullo stesso arco di $A\hat{D}M$ è un angolo retto, come volevasi dimostrare.

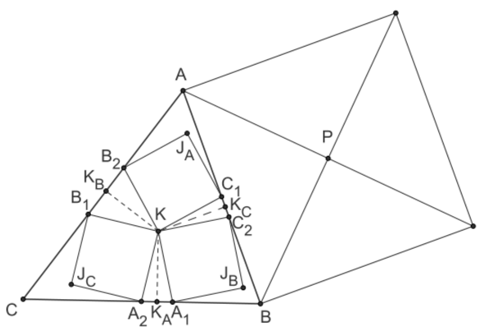
Problema 18
Sia ABC un triangolo con tutti gli angoli maggiori di $45°$ e minori di $90°$.

(a) Dimostrare che si possono disporre all'interno di ABC tre quadrati con le seguenti proprietà:

- *i tre quadrati hanno tutti lo stesso lato;*
- *i tre quadrati hanno un vertice comune K interno al triangolo;*
- *due quadrati qualsiasi non hanno punti in comune oltre a K;*
- *ciascuno dei quadrati ha due vertici opposti sul perimetro di ABC e per il resto è tutto all'interno del triangolo ABC.*

(b) Sia P il centro del quadrato con lato AB ed esterno ad ABC. Sia r_C la simmetrica della retta passante per C e K rispetto alla bisettrice di $A\widehat{C}B$ uscente da C. Dimostrare che P appartiene ad r_C.

<u>Soluzione</u>: Per dimostrare il punto (a) lavoriamo al contrario, disponendo arbitrariamente dei quadrati di lato fissato ed osservando quali sono le caratteristiche del triangolo ABC generato da tale disposizione.



Per l'esattezza (con riferimento alla figura) scegliamo tre angoli

$$\begin{cases} \alpha = A_1\widehat{K}A_2 \\ \beta = B_1\widehat{K}B_2 \\ \gamma = C_1\widehat{K}C_2 \end{cases}$$

tali da non generare sovrapposizioni, ovvero compresi tra 0° e 90°, con somma 90°. Definiamo a questo punto A come l'intersezione tra le rette B_1B_2 e C_1C_2, K_A come il punto medio del segmento A_1A_2; operiamo analogamente per B e C. Il quadrilatero AK_BKK_C risulta avere due angoli retti, poiché i triangoli KB_1B_2 e KC_1C_2 sono isosceli, dunque le mediane relative al vertice K sono al contempo altezze. Analogo discorso per BK_CKK_A e CK_AKK_B, da cui le relazioni:

$$\begin{cases} K_B\widehat{K}K_C = 180° - \widehat{A} \\ K_C\widehat{K}K_A = 180° - \widehat{B} \\ K_A\widehat{K}K_B = 180° - \widehat{C} \end{cases}$$

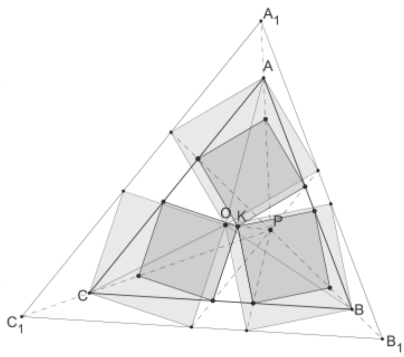
D'altro canto le mediane di cui sopra sono anche bisettrici, per cui il sistema diviene:

$$\begin{cases} \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + 90° = 90° - \widehat{A} \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 90° = 90° - \widehat{B} \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 90° = 180° - \widehat{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\widehat{A} - 90° \\ \beta = 2\widehat{B} - 90° \\ \gamma = 2\widehat{C} - 90° \end{cases}$$

I vincoli su (α, β, γ) si trasformano coerentemente in vincoli su $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$: si ha che ognuno degli ultimi tre angoli dev'essere compreso tra 45° e 90°. Si noti poi che per costruzione i punti J_A, J_B, J_C risultano interni al triangolo ABC. Preso dunque un triangolo come nell'ipotesi, sappiamo come disporre tre quadrati di lato unitario in modo da generare un triangolo simile a quello desiderato; usufruendo di un opportuno movimento rigido seguito da una dilatazione (angoli e rapporti tra lunghezze vengono preservati), la configurazione risolutiva è determinata.

Per quanto riguarda il punto (b), sempre con riferimento alla figura, notiamo che

$$B_1\widehat{A_2}B = 45^\circ + K\widehat{A_2}A_1 = 45^\circ + \frac{180^\circ - (2\widehat{A} - 90^\circ)}{2} = 180^\circ - \widehat{A}$$



Il quadrilatero ABA_2B_1 è perciò ciclico. Ne segue che $C\widehat{B_1}A_2 = 180^\circ - A\widehat{B_1}A_2 = \widehat{B}$ e $C\widehat{A_2}B_1 = 180^\circ - B_1\widehat{A_2}B = \widehat{A}$, dunque i triangoli A_2B_1C e ABC sono simili. D'altro canto, poiché $K\widehat{B_1}A_2 = K\widehat{A_2}B_1 = 45^\circ$, K è il centro del quadrato costruito su A_2B_1 esternamente a CA_2B_1, ragion per cui

$$K\widehat{C}B = P\widehat{C}A$$

e le rette CP e CK risultano simmetriche rispetto alla bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$.