Lezione 2 - Algebra

Problema 1
Siano $a, b \in \mathbb{R}^+$, dimostrare che

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Soluzione: Poniamo $x = \frac{a}{b}$, osserviamo che

$$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$

dato che $x > 0$, possiamo dividere ambo i membri per x, otteniamo:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Problema 2
Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, provare che

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

Soluzione:

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc) \geq 0 \Rightarrow$$
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

Problema 3
Siano λ_1 e λ_2 le radici del polinomio $x^2 - sx + p$, con $s, p \in \mathbb{R}$. Inoltre posto $A_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n$, verificare che:

$$A_{n+1} = sA_n - pA_{n-1}$$

Soluzione: Osservato che $s = \lambda_1 + \lambda_2$ e $p = \lambda_1 \lambda_2$, otteniamo

$$sA_n - pA_{n-1} = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1^n + \lambda_2^n) - (\lambda_1 \lambda_2)(\lambda_1^{n-1} + \lambda_2^{n-1}) =$$
$$= \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} + \lambda_2 \lambda_1^n + \lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_2 \lambda_1^n - \lambda_1 \lambda_2^n =$$
$$= \lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} = A_{n+1}$$

Problema 4
Sia a_n una successione così definita:

$$a_n = \begin{cases} x & n = 0 \\ 2a_{n-1} - 1 & n > 0 \end{cases}$$

Sapendo che $a_{2015} = 2^{2016} + 1$, quanto vale x?

<u>*Soluzione 1*</u>*:* La sucessione a_n è una successione mista, dunque applichiamo la formula per le successione miste:

$$a_n = 2^n a_0 + (-1)\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n x - 2^n + 1$$

Sostituiamo sopra $n = 2015$, sapendo che $a_{2015} = 2^{2016} + 1$ otteniamo

$$2^{2016} + 1 = 2^{2015}x - 2^{2015} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2016} = 2^{2015}(x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = x - 1 \Rightarrow x = 3$$

<u>*Soluzione 2*</u>*:* Poniamo $b_n = a_n - 1$, dunque abbiamo

$$\begin{cases} b_o = a_0 - 1 = x - 1 \\ b_n = a_n - 1 = 2a_{n-1} - 2 = 2b_{n-1} \end{cases}$$

ottenendo una successione geometrica, quindi possiamo scrivere:

$$b_n = 2^n b_0 = 2^n(x - 1)$$

$$b_{2015} = a_{2015} - 1 = 2^{2016} = 2^{2015}(x - 1)$$

da cui si ricava $x = 3$.

Problema 5
Sia $n \in \mathbb{N}$, dimostrare che

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

<u>*Soluzione*</u>*:* Per $n = 0$, la diseguaglianza è banalmente verificata. Per $n \geq 1$ consideriamo la media geometrica e aritmetica dei numeri da 1 fino a n, dato che la media geometrica è minore o uguale alla media aritmetica si ha:

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \sqrt[n]{n!} \leq \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2} \Rightarrow n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Problema 6
Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, dimostrare che la somma delle radici n-esime di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è uguale a 0.

Soluzione: Basta osservare che le radici n-esime di z sono tutte e sole le radici del polinomio $x^n - z = 0$, dato che il termine di grado $n-1$ è uguale a zero, utilizzando le formule di Viètè, la somma delle radici è anch'essa uguale a zero.

Problema 7
Siano a, b, c tre reali positivi, dimostrare che

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Soluzione: Poniamo $x = b + c$, $y = a + c$, $z = a + b$. Troviamo da queste a, b e c

$$a = \frac{(a+b)+(a+c)-(b+c)}{2} = \frac{y+z-x}{2}$$

e, analogamente

$$b = \frac{x+z-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}$$

Pertanto la diseguaglianza da dimostrare diventa:

$$\frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{2x} - \frac{1}{2} + \frac{x+z}{2y} - \frac{1}{2} + \frac{x+y}{2z} - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z}}{6} \geq 1$$

Questa diseguaglianza è vera per la disegualianza tra la media geometrica e la media aritmetica:

$$\frac{\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z}}{6} \geq \sqrt[6]{\frac{y}{x}\frac{z}{x}\frac{x}{y}\frac{z}{y}\frac{x}{z}\frac{y}{z}} = \sqrt[6]{1} = 1$$

Problema 8
Le cinque radici del polinomio $x^5 - 40x^4 + ax^3 + bx + c$ sono in progressione geometrica (a, b, c sono fissati numeri reali). Sapendo inoltre che la somma dei reciproci delle radici è 10, trovare quanto vale $|c|$.

Soluzione: Anzitutto chiamiamo x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 le soluzione dell'equazione. Dal momento che queste sono in progressione geometrica possiamo porre:

$$x_1 = \frac{k}{q^2}, x_2 = \frac{k}{q}, x_3 = k, x_4 = kq, x_5 = kq^2$$

La somma delle radici di un polinomio monico è pari al coefficiente del termine di grado precedente al massimo, in questo caso il quarto, cioè -40:

$$40 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = \frac{k}{q^2}+\frac{k}{q}+k+kq+kq^2 = k\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1+q+q^2\right)$$

Dall'altra ipotesi si ottiene:

$$10 = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1+q+q^2\right)$$

Poniamo $Q = \frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1+q+q^2$, restano quindi:

$$kQ = 40 \qquad \frac{Q}{k} = 10$$

dividendo la prima per la seconda si ottiene

$$k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

Ora il termine noto di un polinomio monico di grado dispari è pari al prodotto delle radici cambiate di segno:

$$c = \left(-\frac{k}{q^2}\right)\left(-\frac{k}{q}\right)(-k)(-kq)(-kq^2) = -k^5$$

Per cui:

$$c = -k^5 = \pm 32 \Rightarrow |c| = 32$$

Problema 9

Calcolare il valore minimo di $\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{b}{a}}$, al variare di a, b numeri reali positivi.

Soluzione: Si ricorre alla disuguaglianza $AM \geq GM$ applicata alla terna $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ In tal modo si scrive

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{4}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Il valore minimo assunto da $\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{b}{a}}$ è quindi $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Problema 10

Siano x, y, z numeri reali positivi tali che $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$$

.

Soluzione: La disuguaglianza di cui sopra equivale a

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{y-1}{y}\right)\left(\frac{z-1}{z}\right) \geq \frac{8}{xyz}$$

o

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{1}{z}\right) \geq \frac{8}{xyz}.$$

Dall'ipotesi e da $AM \geq GM$ si ha

$$1-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{1}{y}\frac{1}{z}}=\frac{2}{\sqrt{yz}}.$$

Analogamente si ottengono $1-\frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{zx}}$ e $1-\frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}$.
Moltiplicando le utlime tre disuguaglianze si ottiene la disuguaglianza da dimostrare.

Problema 11

Dimostrare che per ogni terna a, b, c di numeri reali positivi vale

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c.$$

Soluzione: Da $AM \geq GM$ si ha

$$\frac{a^2}{b}+b \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b}b}=2a.$$

Analogamente valgono anche

$$\frac{b^2}{c}+c \geq 2b \qquad \text{e} \qquad \frac{c^2}{a}+a \geq 2c.$$

Sommando tutte e tre le disuguaglianze si ottiene

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \geq 2(a+b+c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c$$

Problema 12
Siano dati $2n$ numeri distinti $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, e una tabella $n \times n$ riempita come segue: nella casella alla i-esima riga e alla j-esima colonna viene scritto il numero $a_i + b_j$. Dimostrare che se il prodotto di ogni colonna è lo stesso, allora anche il prodotto di ogni riga è lo stesso.

<u>Soluzione</u>: Si considera il polinomio

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x + a_i) - \prod_{j=1}^{n}(x - b_j)$$

di grado minore di n. Se

$$f(b_j) = \prod_{i=1}^{n}(a_i + b_j) = c$$

per ogni $j = 1, \ldots, n$ allora il polinomio $f(x) - c$ ha almeno n radici distinti. Questo implica $f(x) - c = 0$ per ogni x. Ma allora

$$c = f(-a_i) = -\prod_{j=1}^{n}(-a_i - b_j) = (-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{n}(a_i + b_j).$$

Problema 13
Trovare tutti i polinomi a coefficienti reali che soddisfano

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2)$$

<u>Soluzione</u>: La relazione $(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2)$ può essere riscritta come $(x - 2)(x - 4)P(x) = x(x + 2)P(x - 2)$. Per $x = 2$ si ha $P(0) = 0$, per $x = 4$ si ha $P(2) = 0$ e per $x = -2$ si ha $P(-2) = 0$. Pertanto si può scrivere $P(x) = x(x - 2)(x + 2)Q(x)$ con $Q(x)$ polinomio a coefficienti reali. Sostituendo l'espressione di $P(x)$ e cancellando i termini uguali si ottiene $(x - 2)Q(x) = xQ(x - 2)$. Adesso per $x = 0$ si ha $Q(x) = 0$. Quindi $Q(x) = xR(x)$. Sostituendo l'espressione di $Q(x)$ rimane $R(x) = R(x - 2)$. Ciò implica che $R(x)$ è un polinomio costante, quindi $R(x) = k$. Le soluzioni sono $P(x) = kx^2(x^2 - 4)$ $\forall k \in \mathbb{R}$.

Problema 14
Sia (a_n) una successione di numeri reali con $n = 1, 2, 3...$, $a_1 = 2$, $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})$, $n \geq 2$. Trovare il valore di a_{2015}

<u>Soluzione</u>: Si definisce $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Da questa $S_1 = 2$. Quindi vale

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n = S_{n-1} + \left(\frac{n+1}{n-1}\right) S_{n-1} = \left(\frac{2n}{n-1}\right) S_{n-1}$$

.

Sostituendo si ottiene

$$S_n = \left(\prod_{i=2}^{n} \frac{2i}{i-1}\right) S_1 = 2^{n-1}\left(\prod_{i=2}^{n} \frac{i}{i-1}\right) S_1 = 2^n n$$

.

Adesso

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n n - 2^{n-1}(n-1) = 2^{n-1}(n+1)$$

.

Pertanto per $n = 2015$, si ottiene $a_{2015} = 2016(2^{2014})$.

Problema 15

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n, con n pari, avente n radici reali positive e tale che $p(0) = 1$. Quanto può valere, come minimo, la somma delle radici (contate con molteplicità)?

<u>Soluzione</u>: Innanzitutto osserviamo che $p(0)$ è il termine noto, ovvero (dato che il grado è pari) il prodotto delle radici di $p(x)$. Per la disuguaglianza $AM \geq GM$ applicata alle n radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ che per ipotesi sono reali positive, abbiamo che:

$$\frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{n} \geq \sqrt[n]{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \geq n.$$

Effettivamente n è il valor minimo della somma delle radici, in quanto si ottiene per $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, cioè per $p(x) = (x-1)^n$.

Problema 16

Dimostrare che presi comunque $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ reali positivi, vale la disuguaglianza

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geq \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2}$$

e determinare quando vale l'uguaglianza.

<u>Soluzione</u>: Applico la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

ai numeri $a_i = x_i + y_i$ e $b_i = \frac{2}{x_i+y_i}$ per ottenere

$$4n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{x_i + y_i} \right)^2 \right)$$

ma la disuguaglianza media aritmetica-geometrica dice che per ogni i,

$$\frac{x_i + y_i}{2} \geq \sqrt{x_i y_i}$$

che sommata su i e sostituita nella seconda disuguaglianza, mi dà la tesi. Se vale l'uguaglianza, allora deve valere l'uguaglianza nella disuguaglianza tra le medie, il che implica $x_i = y_i$ per ogni i, e che anche nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, il che implica che $\frac{a_i}{b_i}$ è costante in i, da cui $x_i = x_j = y_i = y_j$ per ogni i e j.

Problema 17
Siano $x_1, x_2, \ldots, x_s$ reali positivi tali che $x_1 x_2 \cdots x_s = 1$. Dimostrare che, per ogni $m \geq n > 0$:

$$x_1^m + x_2^m + \ldots x_s^m \geq x_1^n + x_2^n + \ldots + x_s^n$$

Soluzione: Poniamo $d = m - n$. Siccome la disuguaglianza è simmetrica, possiamo assumere $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_s$. Questo implica

$$x_1^n \geq x_2^n \geq \ldots \geq x_s^n$$

$$x_1^d \geq x_2^d \geq \ldots \geq x_s^d$$

Quindi, applicando la disuguaglianza di Chebyshev a queste s-uple ordinate allo stesso modo, e poi $AM - GM$, otteniamo:

$$\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_s^m}{s} = \frac{x_1^d \cdot x_1^n + x_2^d \cdot x_2^n + \ldots + x_s^d \cdot x_s^n}{s} \geq$$

$$\geq \frac{x_1^d + x_2^d + \ldots + x_s^d}{s} \cdot \frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_s^n}{s} \geq$$

$$\geq \sqrt[s]{x_1^d x_2^d \cdots x_s^d} \cdot \frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_s^n}{s} = \frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_s^n}{s}$$