Lezione 1 - Introduzione e combinatoria

Problema 1
Dimostrare che la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2.

<u>Soluzione</u>: Procediamo per induzione. Per $n = 1$, banalmente $1 = 1^2$. Supponiamo che $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Allora:

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1$$

per l'ipotesi induttiva. Osservando che $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, la tesi è dimostrata.

Problema 2
Siano date n rette nel piano, con $n \geq 1$. Supponiamo che:

(i) *siano a due a due non parallele;*

(ii) *siano a tre a tre non secanti in uno stesso punto. Dimostrare che tali rette dividono il piano in $\frac{n^2+n+2}{2}$ regioni.*

<u>Soluzione</u>: Procediamo usando il Principio di Induzione. Per $n = 1$ l'affermazione è vera: una retta divide il piano in $\frac{1^2+1+2}{2} = 2$ regioni. Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per n rette e dimostriamo che rimane vera per $n+1$ rette. Consideriamo $n+1$ rette del piano $r_1, \ldots, r_{n+1}$, che soddisfino le condizioni (i) e (ii), e consideriamo le rette $r_1, \ldots, r_n$. Queste n rette soddisfano le condizioni (i) e (ii), e quindi, per l'ipotesi induttiva, esse dividono il piano in $\frac{n^2+n+2}{2}$ regioni. Cerchiamo ora di capire come la retta r_{n+1} si comporta rispetto queste regioni. Notiamo che la retta r_{n+1} interseca ogni altra retta r_i in un punto P_i (per la condizione (i)), e due punti P_i non possono coincidere (per la condizione (ii)). Facciamo ora le seguenti osservazioni:

- Se ordiniamo i punti P_i sulla retta r_{n+1}, osserviamo che ogni punto P_i coincide ad un passaggio della retta da una regione del piano ad un'altra: quindi complessivamente la retta r_{n+1} passa attraverso $n + 1$ regioni (corrispondenti agli n punti P_i più la regione che precede il primo punto).

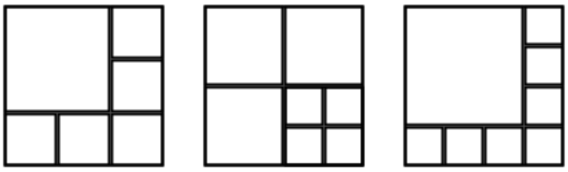
- Ognuna delle $n+1$ regioni attraversate dalla retta r_{n+1} viene divisa in due parti: quindi complessivamente vengono create $n+1$ nuove regioni.

Da queste osservazioni deduciamo che il numero di regioni in cui il piano viene diviso dalle $n+1$ rette è

$$\frac{n^2+n+2}{2}+n+1=\frac{n^2+3n+4}{2}=\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}.$$

Problema 3
Dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 6$, è possibile pavimentare esattamente un quadrato con n quadrati (di dimensione arbitraria), senza sovrapposizioni e senza lasciare buchi.

<u>Soluzione</u>*:* I casi $n=6,7,8$ si possono pavimentare come segue:



Sia data una una pavimentazione di un quadrato con n quadrati. Allora, preso uno dei quadrati della pavimentazione, lo suddividiamo 4 quadrati tracciando i due segmenti che uniscono i punti medi dei segmenti opposti. In questo modo si ottiene una pavimentazione con $n+3$ quadrati. Da ciò si conclude immediatamente per induzione.

Problema 4
Dimostrare che per ogni numero naturale n, vale:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n}{4^n}<\frac{1}{2}$$

<u>Soluzione</u>*:* Dimostriamo per induzione la disuguaglianza più forte:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n}{4^n}\leq\frac{1}{2}-\frac{n}{4^n}$$

per ogni $n \geq 1$. Il passo base è $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, che è vera. Assumiamo la tesi vera per n e dimostriamola per $n+1$:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n}{4^n}+\frac{n+1}{4^{n+1}}\leq\frac{1}{2}-\frac{n}{4^n}+\frac{n+1}{4^{n+1}}$$

per ipotesi induttiva. Dunque la tesi è dimostrata se è vero che $\frac{1}{2}-\frac{n}{4^n}+\frac{n+1}{4^{n+1}} \leq \frac{1}{2}-\frac{n+1}{4^{n+1}}$, che dopo semplici calcoli si riconduce a:

$$n+1 \leq 4n-(n+1)=3n-1$$

ossia $n \geq 1$, che è vera.

Problema 5

In una lavagna sono scritti i numeri $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/100$. *Marco sceglie due numeri* a *e* b, *li cancella e scrive al loro posto il risultato di* $a+b+ab$. *Quindi ripete il processo* 99 *volte, finché vi è un solo numero sulla lavagna. Quale può essere tale numero?*

Soluzione: Dimostriamo anzitutto che il risultato finale non dipende dalle mosse effettuate. Definiamo $a \star b=a+b+ab$. Ovviamente $a \star b=b \star a$; inoltre si verifica facilmente che $a \star(b \star c)=(a \star b) \star c$; dunque l'operazione $\star$ gode delle proprietà commutativa e associativa, e quindi il risultato finale non dipende dalle mosse effettuate.
A questo punto, dimostriamo per induzione che $1 \star \frac{1}{2} \star \cdots \star \frac{1}{n}=n$. Il caso base $n=1$ banale. Infine, assunta la tesi vera per n, segue:

$$\begin{aligned}
1 \star \frac{1}{2} \star \cdots \star \frac{1}{n} \star \frac{1}{n+1} &= \left(1 \star \frac{1}{2} \star \cdots \star \frac{1}{n}\right) \star \frac{1}{n+1} \\
&= n \star \frac{1}{n+1}=n+\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1} \\
&= n+1
\end{aligned}$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Problema 6

Si consideri una griglia $m \times n$, *e si supponga di avere a disposizione tasselli di domino, ossia rettangoli* 1×2 *o* 2×1. *Si supponga che la griglia sia colorata a scacchiera con caselle bianche e nere, in modo che la casella in alto a sinistra sia nera. Dimostrare che:*

a) Si può tassellare la griglia se mn *è dispari e viene rimossa una casella nera.*

b) Si può tassellare la griglia se mn *è pari e viene rimossa una casella bianca e una nera.*

c) Si può tassellare la griglia se mn *è dispari e vengono rimosse due caselle nere e una bianca.*

Soluzione: Utilizziamo la convenzione che m sia il numero di righe e n il numero di colonne.

a) Procediamo per induzione sul numero di caselle mn. Il caso base 3×3 si verifica facilmente (esibendo tutti i pochi casi possibili). Ora supponiamo, per simmetria, che $n \geq m$ e che (m, n) non sia $3, 3$, dunque $n \geq 5$. Osserviamo se la casella mancante non è contenuta nelle prime due colonne, allora possiamo tassellare le prime due colonne con tasselli domino orizzontali e tassellare il resto usando l'ipotesi induttiva; si procede simmetricamente se la casella mancante è in una delle ultime due colonne. Poiché $n \geq 5$, uno dei dui casi si verifica sicuramente.

b) Distinguiamo diversi casi, come segue:

Caso $2 \times n$**:** La tassellatura è banale se le due caselle mancanti sono nella stessa colonna. Altrimenti, siano $j < j'$ le colonne delle due caselle mancanti. Mettiamo tasselli verticali nelle colonne da 1 a $j - 1$ e da $j' + 1$ ad n; si verifica facilmente che si può completare la tassellatura dalla colonna j alla colonna j' con soli tasselli orizzontali.

Caso $3 \times n$**:** Naturalmente il numero di colonne n deve essere pari. Procediamo ancora per induzione su n. Il caso base 3×2 si tassella come nel caso precedente. Supponiamo ora $n \geq 4$. Se la prima riga (o l'ultima riga) non contiene caselle mancanti, la tasselliamo nel modo banale e tasselliamo il resto nella griglia $2 \times n$ rimanente. Supponiamo quindi che una casella mancante sia nella prima riga, una nella terza riga. Se le prime due colonne (rispettivamente, le ultime due colonne) non contengono caselle mancanti, le tasselliamo banalmente e usiamo l'ipotesi induttiva sul resto. Supponiamo dunque che una delle caselle mancanti sia nelle prime due colonne, una nelle ultime due colonne. Tenendo conto che angoli opposti della griglia hanno colore opposto, le uniche configurazioni possibili sono:

- le caselle mancanti sono caselle d'angolo opposte, oppure
- le caselle mancanti sono caselle d'angolo adiacenti a due caselle d'angolo opposte.

Si può verificare facilmente che, in entrambi i casi, è possibile tassellare la griglia rimanente mettendo un tassello verticale nella prima colonna, e tassellando il resto con tasselli orizzontali.

Caso $m \times n$ Affrontiamo ora il caso generale, e procediamo per induzione sulla dimensione della griglia mn. Il caso base è costituito da tutti i casi precedentemente dimostrati. Supponiamo $m, n \geq 4$, e assumiamo senza perdita di generalità che n sia pari. Se la prima riga (o l'ultima riga) non contiene nessuna casella mancante, ci si riconduce ad un caso di dimensione $(m-1) \times n$ con lo stesso ragionamento fatto sopra nel caso $3 \times n$. Dunque, possiamo supporre che una casella mancante sia nella prima riga, e una nell'ultima riga. Sia j la colonna in cui si trova la casella mancante della prima riga. Poniamo tasselli verticali in modo da coprire le prime due righe di tutte le colonne diverse da j; nella colonna j, poniamo un tassello tra le righe 2 e 3. Notiamo che la casella alla riga 3 e colonna j ha lo stesso colore della casella mancante della prima riga. La dimostrazione di questo caso si conclude osservando che la griglia ottenuta eliminando le prime due righe e la casella alla riga 3 e colonna j è una griglia $(m-2) \times n$ che soddisfa l'ipotesi induttiva.

c) Procediamo ancora per induzione sulla dimensione della griglia mn. Si noti che in questo caso, tutte le caselle d'angolo sono nere. Il caso base è la griglia 3×3, le cui poche configurazioni si verificano facilmente. Assumiamo la tesi vera per ogni griglia di dimensione minore di mn, e supponiamo che $(m, n) \neq (3, 3)$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $n \geq m$ e quindi $n \geq 5$. Come al solito, se le prime due o le ultime due colonne non contengono caselle mancanti, ci riconduciamo immediatamente al caso $(m, n-2)$ tassellando le due colonne con tasselli orizzontali. Supponiamo quindi d'ora in poi che vi è almeno una casella mancante nelle prime due e nelle ultime due colonne. Naturalmente, è impossibile che vi siano due caselle mancanti nelle prime due colonne e anche nelle ultime due colonne. Per simmetria, supponiamo dunque che vi sia una sola casella mancante (che chiamiamo A) nelle prime due colonne. Si noti che nella colonna 3 è contenuta al massimo una casella mancante.

   Se non vi sono caselle mancanti nella colonna 3, oppure se nella colonna 3 vi è una casella mancante di colore opposto rispetto ad A, procediamo come segue: osservato che l'eventuale casella mancante nella colonna 3 non può essere in una riga adiacente ad A (per via della colorazione), posizioniamo un tassello orizzontale (che chiamiamo T) in una riga adiacente ad A e tra le colonne 2 e 3; a questo punto: la griglia $2 \times m$ ottenuta prendendo solo le due colonne e togliendo la casella di T soddisfa le ipotesi del punto 2; la rimanente griglia $(n-2) \times m$ ottenuta rimuovendo la casella in T soddisfa l'ipotesi induttiva, e quindi possiamo completare la tassellatura.

   L'ultimo caso rimanente è che A sia nera e l'altra casella mancante nera (che chiamiamo B) sia nella colonna 3. Ma allora, possiamo procedere come nel caso precedente dopo aver posizionato un tassello T tra la colonna 2 e 3 in modo che copra una casella nera nella colonna 3 (ciò è sempre possibile perché nella colonna 3 vi sono almeno 2 caselle nere e solo 1 può essere la casella mancante B, mentre l'eventuale casella della colonna 3 adiacente ad A è bianca). Ciò conclude la dimostrazione.

Problema 7

Diremo che una schedina del Totocalcio (in cui ad ogni partita sono associati i simboli 1-*X*-2*)* è sfortunata *se contiene un numero pari di pareggi (X). Provare che esistono* $\frac{3^n+1}{2}$ *modi distinti di giocare una schedina sfortunata con* n *partite.*

<u>*Soluzione:*</u> Sia k un indice tale che $0 \leq k \leq n/2$. Sapendo che ogni riga di una schedina può contere uno tra i tre simboli $1, 2$, X, segue che il numero di colonne contenenti esattamente $2k$ pareggi è uguale a:

$$c(2k) = 2^{n-2k}\binom{n}{2k}$$

Quindi, se t è il numero di schedine sfortunate, otteniamo che :

$$t = \sum_{0 \leq k \leq n/2} 2^{n-2k}\binom{n}{2k}$$

Osserviamo adesso che, per il teorema del binomio:

$$(2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n}{k}$$

ma anche:

$$(2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}(-1)^n\binom{n}{k}$$

Notiamo che le ultime due somme hanno gli stessi termini, eccetto che, nella seconda, i termini di posto dispari hanno segno negativo. Dunque, nella somma $(2+1)^n+(2-1)^n$, i termini di posto dispari compaiono con coefficiente doppio, quelli di posto pari si cancellano. Di conseguenza:

$$2t = (2+1)^n + (2-1)^n = 3^n + 1$$

Ciò conclude la dimostrazione.

Soluzione alternativa: Chiamiamo *fortunata* una colonna con un numero dispari di pareggi.
Procediamo per induzione. Per $n = 1$, devono esservi 0 pareggi, e quindi la risposta è $2 = (3^1 + 1)/2$. Supponiamo $n \geq 2$, e assumiamo che vi siano $3^{n-1}/2$ giocate sfortunate con $n - 1$ partite. Tra le giocate sfortunate con n partite, alcune hanno un pareggio nella prima partita, altre no. Quelle con un pareggio nella prima partita sono in numero uguale al numero di partite fortunate con $n - 1$ partite, ossia $3^{n-1} - (3^{n-1} + 1)/2 = (3^{n-1} - 1)/2$. Il numero di giocate che non hanno un pareggio nella prima partita (e quindi hanno 1 o 2 nella prima partita) è uguale a 2 volte il numero di partite sfortunate con $n - 1$ partite, ossia $2 \cdot (3^{n-1} + 1)/2$. Osservando che $(3^{n-1} - 1)/2 + 2 \cdot (3^{n-1} + 1)/2 = (3^n + 1)/2$, la tesi è dimostrata.

Problema 8
In un piano cartesiano un oggetto puntiforme parte dal piano $(0, 2n)$ (con n intero positivo) e scende fino all'asse delle ascisse compiendo $2n$ passi, con la seguente regola: se prima di compiere un passo si trova nel punto di coordinate intere (k, l), può recarsi o in $(k - 1, l - 1)$ o in $(k + 1, l - 1)$ con uguale probabilità. Le mosse eseguite nei diversi passi sono indipendenti. Sia $p_n(k)$ la probabilità che dopo $2n$ passi l'oggetto si trovi nel punto $(k, 0)$. Calcolare $p_n(k)$.

Soluzione: Complessivamente vi sono 2^{2n} percorsi possibili di $2n$ passi. Iniziamo osservando che la parità della prima coordinata cambia ad ogni passo: allora dopo $2n$ passi la prima coordinata deve essere necessariamente pari. Dunque $p_n(k) = 0$ se k è dispari. Banalmente, $p_n(k) = 0$ anche se $k < -2n$ o se $k > 2n$, perché vi sono solo $2n$ mosse. Ci rimane quindi da calcolare il numero dei percorsi che terminano nel punto di ascissa $2k$ con $k = -n, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n$. Si termina in $(2k, 0)$ se e solo se si sono fatti $n+k$ passi verso destra e $n-k$ passi verso sinistra, che quindi possono essere fatti in $\binom{2n}{n+k}$ modi. Dunque

$$p_n(2k) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n+k}.$$

Problema 9
Sia m un intero positivo fissato. Dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}^2 = \binom{2m}{m}.$$

Soluzione: Sia $\mathcal{S}$ un insieme di $2m$ palline. Chiamiamo $\mathcal{S}_1$ l'insieme delle prime m palline, ed $\mathcal{S}_2$ l'insieme delle m rimanenti. Il termine $\binom{2m}{m}$ indica il numero di modi in cui è possibile colorare di rosso m palline qualsiasi di $\mathcal{S}$. Tuttavia, se consideriamo uno qualsiasi di questi modi, si ha che tra le m palline colorate di rosso, ve ne sono i contenute in $\mathcal{S}_1$ e $m-i$ contenute in $\mathcal{S}_2$, per qualche i compreso tra 0 e m. Viceversa, osserviamo che colorando i palline di $\mathcal{S}_1$ e $m-i$ di $\mathcal{S}_2$, coloriamo complessivamente m tra le $2m$ palline di $\mathcal{S}$. Questo quindi giustifica l'identità

$$\binom{2m}{m} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{m}{m-i}.$$

Dal momento che $\binom{m}{i} = \binom{m}{m-i}$, otteniamo:

$$\binom{2m}{m} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{m}{m-i} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}^2.$$

Problema 10

La facciata del nuovo dipartimento di Matematica di Parma presenta 30 finestre disposte in una tabella 6×5. Una sera Francesco nota che vi sono 8 luci accese e che in ogni riga e in ogni colonna le luci accese sono o 2 o nessuna. Quante sono le configurazioni che rispettano queste condizioni?

Soluzione: Fissiamo la convenzione che 6 siano le righe e 5 le colonne. Osserviamo anzitutto che devono esservi esattamente 2 righe e 1 colonna senza nessuna luce accesa, e che scelte diverse di tali due colonne e una riga portano necessariamente a configurazioni distinte. Possiamo scegliere le due righe e la colonna in $\binom{6}{2}\binom{5}{1} = 75$ modi diversi. Rimosse le due righe e la colonna vuote, il problema diventa equivalente a contare in quanti modi si possono colorare 8 caselle in una tabella 4×4, in modo che ogni riga e ogni colonna contenga due caselle colorate.

Scegliamo le due caselle colorate della prima riga. Ciò si può fare in $\binom{4}{2}$ modi diversi. Distinguiamo due gruppi di configurazioni: il gruppo A contiene le configurazioni dove un'altra riga ha le 2 caselle colorate nelle stesse due colonne della riga 1, il gruppo B tutte le altre. Contiamo le configurazioni dei due gruppi separatamente.

***Gruppo A*:** Scegliamo la riga con le caselle nella stessa riga (e ciò si può fare in 3 modi); a questo punto dobbiamo scegliere altre 4 caselle colorate, ma non possiamo colorare nessuna casella nella stessa riga o colonna delle caselle già presenti (perché contengono già 2 caselle); dunque rimangono 4 caselle e devono tutte essere colorate. Dunque il gruppo A contiene 3 configurazioni.

Gruppo B : Consideriamo le due colonne che contengono già una casella colorata, e scegliamo un'altra casella colorata per ciascuna (ma in modo che non siano nella stessa riga, altrimenti la configurazione sarebbe nel gruppo A): cio si può fare in 3 modi per la prima scelta, e in 2 per la seconda; chiamiamo i e i' le due righe scelte. A questo punto vi è esattamente una riga che non ha ancora nessuna casella colorata, ma in due sue colonne vi sono già due caselle colorate; dunque coloriamo le sue due rimanenti caselle (e chiamiamo j e j' le colonne corrispondenti). Abbiamo ancora 2 caselle da colorare, e per via delle scelte precedenti: i ed i' sono le uniche due righe con una sola casella colorata, e j e j' sono le uniche due colonne con una sola casella colorata. Dunque abbiamo solo le 4 caselle nelle intersezioni tra le righe i, i' e le colonne j, j'. Evidentemente, le uniche 2 possibilità che rimangono sono quelle di colorare (i, j) e (i', j'), oppure di colorare (i, j') e (i', j). Ricapitolando, il gruppo B contiene $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ configurazioni.

Mettendo tutto insieme, il numero di configurazioni che rispettano le condizioni di Francesco è:

$$75 \cdot \binom{4}{2} \cdot (3 + 12) = 75 \cdot 6 \cdot 15 = 6750.$$

Problema 11

Provare che, comunque siano scelti 52 *numeri interi, tra di essi ve ne sono due la cui somma o la cui differenza è un multiplo di* 100.

<u>Soluzione</u>*:* Ricordiamo che un numero è un multiplo di 100 se e solo se termina con 00. Detto questo, possiamo ricavare che la differenza di due numeri interi è un multiplo di 100 se e solo se essi terminano con le stesse due cifre, mentre la loro somma è un multiplo di 100 se e solo se la somma delle loro ultime due cifre fa 100. Se tra i nostri 52 numeri ve ne sono due le cui ultime cifre sono uguali, allora per quanto detto la loro differenza sarà un multiplo di 100. Quindi ci riduciamo a studiare il caso in cui i 52 numeri sono tali che nessuna coppia tra questi termina con le stesse due cifre. In questo caso, suddividiamo i numeri interi positivi in questi cassetti:

$$\mathcal{C}_1 = \{01, 99\}, \mathcal{C}_1 = \{02, 98\}, \ldots, \mathcal{C}_{49} = \{49, 51\}, \mathcal{C}_{50} = \{50\}, \mathcal{C}_{51} = \{00\}.$$

Poiché abbiamo scelto 52 numeri, per il principio dei cassetti esistono due numeri appartenenti allo stesso cassetto: tuttavia, per il modo in cui la nostra suddivisione è stata effettuata, due numeri appartenenti allo stesso cassetto o hanno le stesse due cifre finali, oppure la somma di queste due cifre farà 100. In entrambi i casi, si ottiene la tesi.

Problema 12
Siano dati 5 *punti del piano a coordinate intere.*
Provare che tra essi ne esistono due il cui punto medio è a coordinate intere.

Soluzione: Siano $P_i = (X_i, Y_i)$, con $i = 1, \dots, 5$, i cinque punti.
Osserviamo dalla formula del punto medio, che il punto medio di due punti a coordinate intere è a sua volta a coordinate intere se e solo se le rispettive coordinate dei punti di partenza hanno la stessa parità.
Alla luce di ciò, suddividiamo i punti a coordinate intere nei seguenti cassetti, a seconda della parità delle sue coordinate (ovviamente P sta per pari e D sta per dispari):

$$\mathcal{C}_1 = \{(P, P)\}, \mathcal{C}_2 = \{(P, D)\}, \mathcal{C}_3 = \{(D, P)\}, \mathcal{C}_4 = \{(D, D)\}.$$

Poiché abbiamo 5 punti, per il principio dei cassetti si ha che vi sono due punti P_i e P_j nello stesso cassetto: ovvero vi sono due punti le cui coordinate hanno entrambe la stessa parità: quindi per quanto detto prima il loro punto medio M è un punto a coordinate intere.

Problema 13
Un gruppo di 9 *persone si dispone in una fila di* 12 *sedie. Dimostrare che vi sono almeno* 3 *sedie consecutive che sono occupate.*

Soluzione: Suddividiamo le persone come segue: il primo gruppo contiene le persone dall'inizio fino alla prima sedia vuota; il secondo gruppo quelle comprese tra la prima e la seconda sedia vuota; il terzo gruppo le persone comprese tra la seconda e la terza sedia vuota; il quarto gruppo le rimanenti persone dopo la terza sedia vuota. Poiché vi sono 4 gruppi e $9 = 2 \cdot 2 + 1$ persone, almeno un gruppo contiene tre persone, che quindi sono sedute consecutivamente.

Problema 14
Siano dati 27 *numeri dispari distinti minori di* 100*. Dimostrare che fra questi numeri esiste una coppia la cui somma è* 102*.*

Soluzione: Innanzitutto notiamo che

$$102 = 51 + 51 = 49 + 53 = 47 + 55 = \ldots = 1 + 101.$$

Scartando le coppie $51 + 51$ e $1 + 101$ in quanto non valide, vi sono 24 coppie di numeri dispari distinti minori di 100 la cui somma è 102 (dato che 24 sono i numeri dispari compresi tra 3 e 49). Ripartiamo ora i numeri dispari compresi tra 1 e 100 in questi cassetti:

$$C_1 = \{1\}, C_2 = \{51\}, C_3 = \{3, 99\}, C_4 = \{5, 97\}, \ldots, C_{26} = \{49, 53\}.$$

Per il principio dei piccioni, scegliendo 27 numeri dispari distinti minori di 100, esiste almeno un cassetto C_i da cui avremo scelto 2 numeri dispari. Poiché i cassetti C_1 e C_2 sono formati da un solo elemento, il cassetto C_i non può essere uno di loro; poiché gli altri cassetti sono formati da coppie la cui somma è 102, il problema è risolto.

Problema 15
La somma delle età di un gruppo di 33 *persone è di* 430 *anni. Dimostrare che si può trovare tra queste un sottoinsieme di* 20 *persone la cui somma delle età superi i* 260 *anni.*

Soluzione: Denotiamo con $P_1, \ldots, P_{33}$ le età delle nostre 33 persone, e consideriamo i valori

$$\mathcal{S}_1 = (P_1 + \ldots + P_{20}), \mathcal{S}_2 = (P_2 + \ldots + P_{21}), \ldots, \mathcal{S}_{14} = (P_{14} + \ldots + P_{33}),$$

$$\mathcal{S}_{15} = (P_{15} + \ldots + P_{33} + P_1), \ldots, \mathcal{S}_{33} = (P_{33} + P_1 + \ldots + P_{19}).$$

Vogliamo provare che $\mathcal{S}_i > 260$ per qualche i compreso tra 1 e 33.
Osserviamo che ogni P_i compare come addendo in esattamente 20 somme $\mathcal{S}_i$, quindi

$$\mathcal{S}_1 + \ldots + \mathcal{S}_{33} = 20(P_1 + \ldots + P_33) = 20 \cdot 430 = 8600.$$

Sia $\mathcal{S}_k$ il massimo dei vari $\mathcal{S}_i$. Allora

$$33\mathcal{S}_k \geq \mathcal{S}_1 + \ldots + \mathcal{S}_{33} = 8600,$$

da cui $\mathcal{S}_k \geq \frac{8600}{33} = 260,60\ldots > 260$.

Problema 16
I numeri di Fibonacci sono definiti come segue: $F_0 = 0, F_1 = 1$ *e per* $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
Dimostrare che esistono infiniti numeri di Fibonacci che terminano per 0001.

Soluzione: Scriviamo tutti i numeri in modo che abbiano almeno 4 cifre, anteponendo zeri se necessario (ad esempio 1 diventa 0001). Si noti che, note le ultime 4 cifre di due numeri di Fibonacci consecutivi F_n e F_{n+1}, le ultime 4 cifre di F_{n-1} e F_{n+2} sono univocamente determinate. Si considerino perciò $10000^2 + 1$ arbitrarie coppie di numeri di Fibonacci, tali che nessun numero F_n compaia due volte. Poiché il numero di modi possibili di scegliere le ultime 4 cifre di ciascun numero di una coppia è 10000^2, ci sono due coppie (F_a, F_{a+1}) e (F_b, F_{b+1}) (con $a < b$) con esattamente le stesse ultime 4 cifre in entrambi i numeri; per l'osservazione iniziale, F_{a+2} e F_{b+2} terminano con le stesse 4 cifre, come pure F_{a-1} e F_{b-1}, e per induzione segue che in generale F_{a+k} e F_{b+k} terminano con le stesse 4 cifre, per ogni intero $k \geq -a$. Ma allora, detto $D = b - a$ e scelto $k = n - a$, si deduce che F_n e F_{n+D} terminano con le stesse 4 cifre, o in altri termini le ultime 4 cifre di F_n ripetono periodicamente, con periodo D). Allora $F_1, F_{1+D}, F_{1+2D}, \ldots$ terminano tutti per 0001. Osservando che solo un numero finito di essi può essere minore di 1000 (e quindi solo ad un numero finito abbiamo anteposto degli zeri), la tesi è dimostrata.

Problema 17

In un cerchio di raggio 4 *sono contenuti* 61 *punti. Dimostrare che ve ne sono due che distano al più* $\sqrt{2}$.

Soluzione: Inscriviamo il cerchio in una griglia quadrata 8×8, formata dunque da 64 quadratini. È facile verificare che i 4 quadratini agli angoli della griglia sono completamente all'esterno del cerchio (dato che $4 < 3\sqrt{2}$). Tolti questi, rimangono dunque 60 quadratini di lato 1 che contengono 61 punti, e per il principio dei cassetti ve ne sono due nello stesso quadrato. Poiché la massima distanza possibile tra due punti contenuti in un quadrato è la diagonale, la distanza tra questi due punti è al più $\sqrt{2}$.

Problema 18

In un gruppo ci sono 7 ragazzi (indicati con M) e 13 ragazze (indicate con F) sono messi in fila in un qualche ordine. Sia S il numero di coppie di persone consecutive di sesso opposto. Ad esempio, se la disposizione è FFMFFFMFF-FMMMFFFMFFM, allora S vale 9*. Qual è il valor medio di S (al variare di tutte le possibili permutazioni dei 20 ragazzi)?*

Soluzione: Le permutazioni dei 20 ragazzi sono 20!. Consideriamo anzitutto una coppia ragazzo-ragazza fissata (diciamo, Alice a Bob) e un indice $i \in \{1, \ldots, 19\}$. Contiamo anzitutto in quante permutazioni Alice e Bob sono in posizione i e $i + 1$ (o viceversa): chiaramente $2 \cdot 18!$. Le possibili coppie ragazzo-ragazza sono $7 \cdot 13$, e i valori di i sono 19. Dunque la risposta è:

$$\frac{2 \cdot 18! \cdot 19 \cdot 7 \cdot 13}{20!} = \frac{91}{10}$$

Problema 19

Siano M e k due interi positivi. Quante sono le soluzioni della disuguaglianza $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq M$ se $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sono numeri naturali? (NB: 0 è un numero naturale).

<u>*Soluzione:*</u> Aggiungiamo un'altra variabile intera x_{k+1}. Osserviamo che il numero richiesto è uguale al numero di soluzioni in numeri naturali di

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = M$$

Infatti, per ogni soluzione della disuguaglianza iniziale, vi è una soluzione dell'equazione ottenuta ponendo $x_k = M - (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$, e viceversa. Ora, se sostituiamo la variabile x_i con una sequenza di x_i simboli "O", è evidente che ogni soluzione della nostra equazione è un anagramma della "parola" formata da $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = M$ simboli "O" e k simboli "+". Dunque, il numero richiesto è $\frac{(M+k)!}{M!k!} = \binom{M+k}{k}$.

Problema 20

Due amici si sono iscritti alla prima classe di un liceo. Tale liceo ha due sezioni, le cui prime classi hanno rispettivamente n e m studenti, con n e m compresi tra 20 e 30. Ogni studente è assegnato a ciascuna delle due classi con probabilità 1/2.

Sapendo che la probabilità che i due amici si trovino nella stessa classe è 1/2, quanti sono gli studenti delle due classi?

<u>*Soluzione:*</u>Indichiamo con A eB i due amici e sia M la classe con m studenti e N la classe con n studenti. Vi sono m casi su un totale di $m + n$ casi nei quali A viene iscritto in M; sapendo poi che A sta in M, in $m - 1$ casi su $m + n - 1$,anche B viene iscritto in M. Perciò la probabilità che A e B siano entambi in M è

$$\frac{m(m-1)}{(m+n)(n+n-1)}$$

Analogamente la probabilità che entrambi stiano in N è

$$\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

la probabilità che A e B stiano nella stessa classe è espressa dalla somma delle due probabilità. Si ottine l'equazione:

$$\frac{m(m-1) + n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} = \frac{1}{2},$$

equivalente a

$$(m-n)^2 = m+n$$

con m e n fra 20 e 30. Si deduce che m+n é un quadrato perfetto; necessariamente si ha che $m+n=49$ che è il solo quadrato perfetto compreso fra 40 e 60. Supponendo per esempio $m>n$ otteniamo

$$\begin{cases} m+n=49 \\ m-n=7 \end{cases}$$

da cui $m=28$ e $n=21$

Problema 21
Ci sono tre palline di differenti colori in una borsa. Si estraggono una per volta, con reimmissione. Calcolare la probabilità che dopo n estrazioni:

a) *sia uscito esattamente un colore;*

b) *siano usciti esattamente due colori;*

c) *siano usciti tutti e tre i colori.*

Soluzione:

a) Estratta la prima pallina, il colore è fissato, dunque le altre devono uscire con lo stesso colore; ciò avviene con probabilità $\frac{1}{3}$ per ciascuna pallina. Dunque la probabilità richiesta è $\frac{1}{3^{n-1}}$

b) Dopo che viene estratta la prima pallina, che determina il primo colore, abbiamo due possibilità: esce un colore diverso oppure esce lo stesso colore. Nel primo caso tutte le palline successive devono essere di uno di quei due colori; nel secondo caso si ripete la scelta fino alla penultima pallina. La probabilità richiesta è quindi:

$$\sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i-1} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dallo sviluppo di $(1+1)^n$ con il teorema del binomio.

c) La probabilità richiesta è la complementare alle due precedenti, ossia $1-\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3^{n-1}-2^{n-2}-1}{3^{n-1}}$.

Problema 22

Sia $1 \leq r \leq n (n \in \mathbb{N})$ e si considerino tutti i sottoinsiemi di r elementi dell'insieme costituito da $1, 2, \ldots, n$. Ciascuno di questi sottoinsiemi ha un elemento minimo. Se $u(n, r)$ è la media aritmetica di questi elementi minimi, dimostrare che

$$u(n, r) = \frac{n+1}{r+1}$$

Soluzione: Il numero di sottoinsiemi di r elementi è $\binom{n}{r}$. Il minimo di ciascuno di questi sottoinsiemi è almeno 1 e non più di $n - r + 1$ (se si prendono gli r elementi più grandi). Se $1 \leq k \leq n - r + 1$, il numero dei nostri sottoinsiemi che hanno k come minimo è $\binom{n-k}{r-1}$, poiché ciascuno di essi deve contenere esattamente $r - 1$, tutti presi tra $\{k + 1, \ldots, n\}$. Possiamo dunque scrivere:

$$u(n, r) = \frac{\sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}}$$

Poiché $\binom{n+1}{r+1} = \frac{n+1}{r+1} \binom{n}{r}$, la tesi è equivalente all'identità:

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1} \tag{1}$$

Osserviamo che il termine di sinistra corrisponde al numero di modi di scegliere $r + 1$ elementi nell'insieme $A = \{1, 2, \ldots, n + 1\}$. Naturalmente, se si scelgono $k + 1$ elementi di A, il più piccolo vale almeno 1 e non più di $n - r + 1$ per lo stesso ragionamento fatto sopra, e quindi il secondo elemento più piccolo vale almeno 2 e non più di $n - r + 2$. Sia $s(k)$ il numero di sottoinsiemi di A con $r + 1$ elementi che hanno $k + 1$ come secondo elemento. Notiamo anche che se due sottoinsiemi hanno un secondo elemento distinto, allora sono essi stessi distinti. Naturalmente vi sono k modi per scegliere il primo elemento, e rimangono poi $(n + 1) - (k + 1) = n - k$ elementi tra cui scegliere i rimanenti $r - 1$ elementi. Dunque

$$s(k) = k \binom{n-k}{r-1}$$

Di conseguenza, sommando per tutti i valori possibili di k, possiamo scrivere:

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=1}^{n-r+1} s(k) = \sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1}$$

che è la (1). Ciò conclude la dimostrazione.